Jean-Marcel STROCK

Étudiant en Master 2

Recherche en didactique des mathématiques

Marseille, le mercredi 15 mai 2013.

UE 34 – Actualité de la recherche en mathématiques

1°) Motivations

Je me souviens d'une séance de cours d'Yves Matheron où il présentait la résolution d'une équation du second degré, à la manière d'Al Khwarizmi, qui a eu pour conséquence de me faire retravailler l'algèbre. S'en est suivie une séance de cours d'Alain Mercier, à propos des nombres décimaux et de l'extraction de la racine carrée d'un nombre, qui a réveillé des souvenirs douloureux de collégien sur cette fameuse division qui m'avait posé tant de problèmes. Avec plus de recul aujourd'hui, j'ai cherché à comprendre comment fonctionnait cet algorithme, ce qui m'a conduit à lire, en particulier, la thèse de Teresa Assude dans laquelle j'ai trouvé des réponses à mes questions à la fois mathématique et didactique. Suite à une séance de cours avec Michèle Artaud, et recherchant des exemples de parcours d'études et de recherches (PER) en algorithmique, je me suis dirigé vers un article d'Yves Chevallard, datant de 2006, intitulé « *La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD.* » . Un passage de ce texte a attiré mon attention sur un thème que je croyais complètement maîtriser : les fractions.

Aussi, vous comprendrez pourquoi, lorsque l'équipe de professeurs de l'U.E. 3.4, Pierre Arnoux, Christian Mauduit, Lionel Vaux, a demandé aux étudiants dont je fais partie, un travail de recherche en lien avec l'actualité des mathématiques, j'ai eu envie de poursuivre mon enquête dans un domaine arithmétique en choisissant comme thème : les nombres irrationnels. Fort du travail initié pour le mémoire sur l'algorithmique, j'ai vite compris qu'il fallait restreindre le champ de mes recherches, faute de temps.

Pierre Arnoux m'a conseillé un thème d'actualité, présenté par Julien Grivaux et Pascal Hubert, lors du séminaire Bourbaki d'octobre 2012, alliant la géométrie à la rationalité et portant sur les exposants de Liapounoff du flot de Teichmüller (d'après Eskin-Kontsevich-Zorich). J'ai préféré écarter momentanément l'idée proposée, par crainte de ne pouvoir maîtriser, dans le temps imparti, le contenu mathématique de l'article. Christian Mauduit, quant à lui, m'a suggéré d'étudier l'irrationalité du nombre $\zeta(3)$. J'ai pensé alors que cela devrait être dans le champ de mes compétences, mais j'étais bien loin de réaliser l'étendue de la question. Mais, c'est aussi cela qui fait le charme de la recherche en mathématiques !

On doit à Carl Friedrich Gauss (1777-1855) l'affirmation selon laquelle, si les mathématiques sont « la reine des sciences », la théorie des nombres (ou arithmétique supérieure) est « la reine des mathématiques ».
Et Louis Mordell (1872-1952) renchérit : « La théorie des nombres est sans rivale pour la quantité et la variété de ses résultats, la beauté et la force de ses démonstrations. L'arithmétique supérieure semble renfermer une grande partie du romantisme des mathématiques. Comme Gauss l'écrivait à Sophie Germain, ses beautés ne se révèlent qu'à ceux qui ont le courage de l'étudier en profondeur ».

On pourrait ajouter que, bien souvent, les énoncés de la théorie des nombres s'avèrent d'une extrême simplicité ; c'est précisément du contraste entre la simplicité des énoncés et la complexité des démonstrations que provient une bonne part de son charme.

2°) **Question de recherche**

Ma question de recherche peut se formuler en ces termes :

Q : « Où en est la recherche à propos de la connaissance des nombres irrationnels ? »

Dans mon exposé, je me limiterai à étudier quelques nombres irrationnels, plus ou moins connus, et tenterai de mettre en exergue certaines organisations mathématiques utiles, voire indispensables, pour la mise en œuvre d'une pédagogie de l'enquête, autour de la notion de nombres irrationnels, au niveau de l'enseignement supérieur.

Pour entrer en matière, je commencerai par la citation d'un court extrait de l'ouvrage « *Une histoire des mathématiques. Routes et dédales* », d'Amy Dahan-Dalmedico et de Jeanne Peiffer, publié aux éditions du Seuil, en mars 1986, pages 204-207, dans lequel les auteurs montrent comment Dedekind est amené à créer les nombres irrationnels :

[…] Comme pour Weierstrass, c'est l'obligation d'exposer le calcul différentiel et intégral à des étudiants qui fit réfléchir R. Dedekind (1831-1916) « jusqu'à ce qu'il trouve des fondements purement arithmétiques, et tout à fait rigoureux, aux principes de l'analyse infinitésimale ». Il prend l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels comme point de départ. Il déclare en 1876 : « *Je suppose comme base, à propos de laquelle on doit naturellement s'être entendu, l'Arithmétique des nombres rationnels, supposé bien fondée, et rien d'autre ; je montre dans mon ouvrage que, sans immixtion de choses étrangères, on peut constater dans le domaine des nombres rationnels un phénomène qui peut être employé à compléter par une création unique de nombres irrationnels*. » […]

Le phénomène dont parle Dedekind, c'est la coupure. Guidé par l'intuition géométrique qu'un point M d'une droite partage les points de celle-ci en deux classes, la classe des points situés à droite de M et celle des points situés à gauche de M, Dedekind appelle « coupure » (C_1 ; C_2) de $\mathbb{Q}$ une partition de $\mathbb{Q}$ en deux classes C_1 et C_2 non vides et disjointes telles que tout nombre de la première C_1 soit strictement inférieur à tout nombre de la seconde C_2.

Les coupures déterminées par un nombre rationnel […] possèdent la propriété suivante : ou bien il existe un plus grand élément dans C_1, ou bien il existe un plus petit élément dans C_2. Inversement, une coupure possédant cette propriété détermine un nombre rationnel.

Or, on constate rapidement l'existence de coupures n'ayant pas cette propriété ; Dedekind en donne un exemple : C_1 contient l'ensemble des nombres rationnels négatifs plus les nombres rationnels positifs dont le carré est inférieur à 2 et C_2 tous les autres nombres rationnels. Un plus grand élément x de C_1 (un plus petit élément de C_2) devrait satisfaire $x^2 = 2$, ce qui est impossible dans $\mathbb{Q}$ et il ne peut y avoir de plus grand élément dans C_1 (de plus petit élément de C_2). Dedekind poursuit : « *Nous créons avec une telle coupure un nouveau nombre irrationnel a, complètement déterminé par cette coupure. Nous dirons que le nombre a correspond à la coupure* (C_1 ; C_2) *ou encore qu'il crée cette coupure* ». Dans l'exemple, $a = \sqrt{2}$ correspond à la coupure (C_1 ; C_2). À toute coupure correspond désormais un nombre, et un seul, rationnel ou irrationnel. […]

3°) Étude de quelques nombres irrationnels

a) Des racines carrées

Il semblerait, selon les historiens des mathématiques tels que Zeuthen et Heath, que la démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ ait été trouvée au sein de l'école pythagoricienne, sans toutefois de certitude sur son auteur (il n'est pas certain que ce soit Pythagore lui-même), ni sur sa datation précise. Elle repose sur une propriété : « *si a^2 est pair, alors a l'est aussi* », dont voici la preuve, par contraposition. Supposons a impair, il s'écrit alors $2p + 1$ avec p entier naturel. En l'élevant au carré, on obtient : $a^2 = 4p^2 + 4p + 1$, c'est-à-dire $a^2 = 2q + 1$ en posant $q = 2p^2 + 2p$ entier naturel ; il en résulte que a^2 est impair.

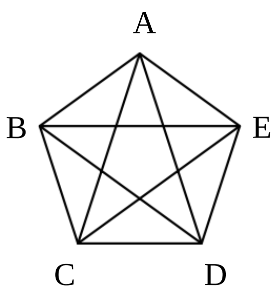
Venons-en à la preuve de l'irrationalité de $\sqrt{2}$, à la manière des Pythagoriciens. Raisonnons par l'absurde. Supposons que $\sqrt{2}$ soit un nombre rationnel. Alors, il existe deux entiers naturels a et b premiers entre eux tels que $a^2 = 2b^2$ (*). Si bien que, sous cette hypothèse, a^2 est pair et donc a l'est aussi : il s'écrit alors $a = 2c$ avec c entier. En remplaçant a par $2c$ dans l'égalité (*) et en simplifiant par 2, on aboutit à : $2c^2 = b^2$. D'où l'on tire que b^2 est pair et donc b l'est également. Cela entre en contradiction avec l'hypothèse « a et b premiers entre eux ». On en conclut à l'irrationalité du nombre $\sqrt{2}$.

L'argument principal de la preuve précédente se prête difficilement à la généralisation. Il n'a fallu pas moins de 50 ans pour en voir apparaître des traces. Dans un passage célèbre de Theætetus de Platon, il est fait mention que Theodorus, le maître de Platon, a démontré l'irrationalité de $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ... « en prenant tous les cas séparément jusqu'à la racine de 17 pieds carrés où, pour une raison inconnue, il s'est arrêté ».

Une démonstration, plus enclin à la généralisation, prend appui sur le premier théorème d'Euclide :
« *si p est un nombre premier et s'il divise le produit de deux entiers a et b, alors il divise au moins l'un d'entre eux* », qui peut s'établir de la manière suivante.
Soit p un nombre premier divisant le produit de deux entiers naturels a et b. S'il ne divise aucun d'eux, il est premier avec chacun d'eux (un nombre premier est premier avec les entiers qu'il ne divise pas) et donc avec leur produit. De cette contradiction, il résulte que p divise a ou b.

Revisitons alors la démonstration, à l'aide du premier théorème d'Euclide, et vérifions sa robustesse en établissant, cette fois-ci, l'irrationalité de $\sqrt{3}$. Raisonnons à nouveau par l'absurde et supposons qu'il existe deux entiers naturels a et b premiers entre eux tels que $a^2 = 3b^2$. Alors, b divise a^2 avec $b > 1$ et tout diviseur premier p de b divise donc a^2. Par suite, p divise a, ce qui impossible car pgcd(a ; b) = 1. $\sqrt{3}$ est donc bien un nombre irrationnel. On conçoit assez facilement, en utilisant le même type d'argument, que les nombres $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$ sont aussi irrationnels.

Dans les *Éléments d'histoire des mathématiques*, de Nicolas Bourbaki, on trouve la citation ci-dessous :



« Un auteur récent a fait la remarque ingénieuse que la construction du pentagone régulier étoilé connue des Pythagoriciens (dont c'était un des symboles mystiques) conduit immédiatement à une démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{5}$, et a émis l'hypothèse (qui malheureusement n'est appuyée par aucun texte) que c'est de cette manière que les Pythagoriciens auraient découvert les nombres irrationnels ».

Définition 1

Un segment U est une *partie aliquote* d'un segment S si l'on peut reporter le segment U dans le segment S un nombre entier de fois exactement.

Théorème 1

Pour que deux segments S et T admettent une partie aliquote commune, il faut et il suffit que le rapport de leurs longueurs soit un nombre rationnel.

Preuve

Si S et T ont une partie aliquote commune U, on a $s = mu$ et $t = nu$ où s, t et u désignent les longueurs respectives des segments considérés. Comme, dans ces égalités, les nombres m et n sont des entiers naturels non nuls, les rapports $\frac{s}{t}$ et $\frac{m}{n}$ sont égaux.

Réciproquement, si $\frac{s}{t}$ est un nombre rationnel, on peut l'écrire $\frac{m}{n}$ avec m et n entiers naturels non nuls.

On a donc $u = \frac{s}{t} = \frac{m}{n}$ ce qui définit une longueur u telle que $s = mu$ et $t = nu$.

Définition 2

Un segment U est *incommensurable* à un segment S lorsque U n'est pas une *partie aliquote* de S.

Théorème 2

Le côté d'un pentagone régulier convexe est incommensurable au côté du pentagone étoilé correspondant.

Plus généralement, on peut établir que, si un entier n supérieur ou égal à 2 n'est pas le carré d'un entier naturel, alors sa racine carrée est un nombre irrationnel.

Soit n un tel entier. Supposons que $\sqrt{n}$ soit rationnel, il s'écrit $\sqrt{n} = \frac{a}{b}$ avec a et b entiers premiers entre eux et $b > 1$. Donc $a^2 = b^2n$. Par conséquent, b divise a^2, et tout diviseur premier p de b divise a^2, donc p divise a. C'est absurde car a et b sont premiers entre eux. Ce qui achève la démonstration.

On peut aussi démontrer ce théorème sans recourir au premier théorème d'Euclide. Pour cela, il suffit d'écrire $\sqrt{n}$ sous la forme $\sqrt{n} = a + \frac{b}{c}$ où a, b et c sont des entiers naturels tels que $0 < b < c$ et $\frac{b}{c}$ est la fraction de plus petit numérateur vérifiant cette égalité. On en tire : $c^2n = (ac+b)^2 = a^2c^2 + 2abc + b^2$. D'où, b^2

divise c et l'on a : $b^2 = cd$ avec $0 < d < b$ (car $0 < b < c$). La fraction $\frac{d}{b}$ de numérateur strictement plus petit que b vérifie l'égalité $\sqrt{n} = a + \frac{d}{b}$. Ce qui est contradictoire et achève la démonstration.

Qu'en est-il des racines n-ièmes d'un entier naturel x ?

Le nombre $\sqrt[n]{x}$ est irrationnel, excepté lorsque x est une puissance n-ième d'un entier naturel. En effet, raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe deux entiers naturels a et b premiers entre eux avec $b > 1$ (sinon $x = a^n$, ce qui est exclu par hypothèse), vérifiant l'égalité $a^n = xb^n$. Alors, b divise a^n et par conséquent, tout diviseur premier p de b divise a^n. D'où p divise a, ce qui est absurde.

Comme corollaire à ce dernier résultat, nous pouvons signaler que l'ensemble des nombres irrationnels est infini. Il contient, en particulier, les racines n-ièmes de 2, de 3, de 5, … pour n'en citer que quelques-unes.

On peut généraliser le résultat précédent obtenu à propos des nombres de la forme $\sqrt[n]{x}$ comme suit :

<u>Théorème 3</u>

Soit x un nombre réel vérifiant une équation de la forme $x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n = 0$ où n est un entier naturel non nul et où a_1, ..., a_n sont des entiers quelconques.

Si x n'est pas entier, alors x est irrationnel.

<u>Preuve</u>

Supposons que x soit rationnel.

On peut alors l'écrire sous la forme $x = \frac{a}{b}$ avec a et b deux entiers premiers entre eux et b non nul.

Par hypothèse, on sait que $\frac{a^n}{b^n} + a_1 \frac{a^{n-1}}{b^{n-1}} + ... + a_n = 0$ ce qui implique que $a^n + a_1 a^{n-1} b + ... + a_n b^n = 0$ **(1)**.

Alors on a nécessairement : $b = \pm 1$.

En effet, sinon il existerait un nombre premier p divisant b. D'où, p diviserait $a_1 a^{n-1} b + ... + a_n b^n$ et, d'après la relation **(1)**, p diviserait a^n et donc aussi a. Cela contredit le fait que a et b soient premiers entre eux. On en conclut que x est entier. Cela prouve le théorème par contraposition.

<u>Exemple 1</u>

On pose $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. On se propose de vérifier que x est irrationnel.

Pour cela, on écrit : $x^2 = 5 + 2\sqrt{6}$ donc $x^2 - 5 = 2\sqrt{6}$ et par suite $\left(x^2 - 5\right)^2 = 24$.

Le nombre réel x non entier (car $3,1 < x < 3,3$) vérifie l'équation $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$.

D'après le théorème précédent, il s'ensuit que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est irrationnel.

<u>Exemple 2</u>

À l'aide de la même technique, on peut montrer que le nombre d'or $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est irrationnel.

En effet, φ n'est pas entier (car 1,6 < φ < 1,7) et vérifie l'équation $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$.

b) Le nombre *e*

Établissons l'irrationalité du nombre *e*, limite de la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

Raisonnons par l'absurde et écrivons *e* sous la forme $e = \frac{a}{b}$ avec *a* et *b* entiers naturels non nuls.

Par conséquent, le nombre entier naturel $b!\left(e - u_b\right)$ vérifie :

$$0 < b!\left(e - u_b\right) < \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\left(b+1\right)^k} = \frac{1}{b+1} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{b+1}} = \frac{1}{b} < 1.$$

De cette contradiction résulte l'irrationalité de *e*.

c) Le nombre π

Johann Heinrich Lambert (1728 – 1777), un mathématicien autodidacte alsacien, démontra en 1761 l'irrationalité du nombre π. Sa démonstration très différente de celle que je me propose de présenter ici, s'appuyait sur des propriétés particulières du développement en fraction continue de la fonction tangente.

[*Petite digression historique : il faudra attendre 1882 pour que Ferdinand von Lindemann établisse la transcendance de π, démontrant l'impossibilité de la quadrature du cercle.*]

Lemme 1

Soient $n \in \mathbb{N}$ et P la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{P}(x) = x^n$.

P est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} \mathrm{P}^{(k)}(x) = 0 \text{ si } k > n \\ \mathrm{P}^{(k)}(x) = \dfrac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \text{ si } k \in \llbracket 0 ; n \rrbracket \end{cases}$.

Preuve

Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrons par récurrence sur *k* que $\forall k \in \llbracket 0 ; n \rrbracket,\ \mathrm{P}^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$.

Initialisation : On a $\frac{n!}{(n-0)!} x^{n-0} = x^n = \mathrm{P}(x) = \mathrm{P}^{(0)}(x)$. La propriété est donc vraie au rang *k* = 0.

Hérédité : Soit $k \in \llbracket 0 ; n-1 \rrbracket$. On suppose que $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{P}^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$.

Alors, $\mathrm{P}^{(k)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{P}^{(k+1)}(x) = \left(\mathrm{P}^{(k)}\right)'(x) = \frac{n!}{(n-k)!}\left(n-k\right)x^{n-k-1} = \frac{n!}{(n-k-1)!} x^{n-k-1} = \frac{n!}{\left(n-\left(k+1\right)\right)!} x^{n-(k+1)}.$$

Conclusion : $\forall k \in \llbracket 0 ; n \rrbracket,\ \mathrm{P}^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$.

D'après ce qui précède, on a en particulier : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{P}^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(n-n)!} x^{n-n} = n!$.

Il s'ensuit que, $\forall k \in \ \ n+1 \,;\, 2n \ \ ,\ \mathrm{P}^{(k)}(x) = 0$.

<u>Lemme 2</u> (Formule d'Hermite)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et P une fonction polynôme de degré $2n$ définie sur $\mathbb{R}$.

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{F}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \mathrm{P}^{(2k)}(x)$.

Alors, $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{P}(x)\sin(x)dx = \mathrm{F}(0) + \mathrm{F}(\pi)$.

<u>Preuve</u>

Soient F et G les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{F}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \mathrm{P}^{(2k)}(x) \text{ et } \mathrm{G}(x) = \mathrm{F}'(x)\sin(x) - \mathrm{F}(x)\cos(x).$$

F est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et il en est donc de même pour G.
Démontrons que $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{F}''(x) + \mathrm{F}(x) = \mathrm{P}(x)$.
Par linéarité de la dérivation, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{F}'(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \mathrm{P}^{(2k+1)}(x) \text{ et donc } \mathrm{F}''(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \mathrm{P}^{(2k+2)}(x) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \mathrm{P}^{2k}(x).$$

Comme P est de degré $2n$, $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{P}^{(2n+2)}(x) = 0$ et donc $\mathrm{F}''(x) = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \mathrm{P}^{2k}(x) = -\mathrm{F}(x) + \mathrm{P}(x)$.

D'où, $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{F}''(x) + \mathrm{F}(x) = \mathrm{P}(x)$. On en déduit donc que, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{G}'(x) = \mathrm{F}''(x)\sin(x) + \mathrm{F}'(x)\cos(x) - \mathrm{F}'(x)\cos(x) + \mathrm{F}(x)\sin(x) = \left[\mathrm{F}''(x) + \mathrm{F}(x)\right]\sin(x) = \mathrm{P}(x)\sin(x).$$

Il en résulte que :

$$\int_0^{\pi} \mathrm{P}(x)\sin(x)dx = \int_0^{\pi} \mathrm{G}'(x)dx = \mathrm{G}(\pi) - \mathrm{G}(0) = \mathrm{F}'(\pi)\sin(\pi) - \mathrm{F}(\pi)\cos(\pi) - \left[\mathrm{F}'(0)\sin(0) - \mathrm{F}(0)\cos(0)\right]$$

$$\boxed{\int_0^{\pi} \mathrm{P}(x)\sin(x)dx = \mathrm{F}(0) + \mathrm{F}(\pi)}.$$

<u>Lemme 3</u>

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et P_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{P}_n(x) = \dfrac{1}{n!} x^n (a - bx)^n$.

Soit F_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{F}_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \mathrm{P}_n{}^{(2k)}(x)$.

Alors, $\mathrm{F}_n(0) \in \mathbb{Z}$ et $\mathrm{F}_n(\pi) \in \mathbb{Z}$.

<u>Preuve</u>

Soient Q_n et R_n les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{Q}_n(x) = x^n$ et $\mathrm{R}_n(x) = \mathrm{Q}_n(a-bx) = (a-bx)^n.$

Q_n et R_n sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ et donc P_n l'est aussi.

D'après la formule de Leibniz, on a :

$$\forall k \in \llbracket 0 ; n-1 \rrbracket,\ \mathrm{P}_n^{(k)}(0) = \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \mathrm{Q}_n^{(i)}(0)\ \mathrm{R}_n^{(k-i)}(0).$$

Comme Q_n est de degré n, $\forall i \in \llbracket 0 ; n-1 \rrbracket,\ \mathrm{Q}_n^{(i)}(0) = 0.$ Donc $\forall k \in \llbracket 0 ; n-1 \rrbracket,\ \mathrm{P}_n^{(k)}(0) = 0.$

On a : $\mathrm{Q}_n^{(n)}(0) = n!$ et $\forall k \in \llbracket n+1 ; 2n \rrbracket,\ \mathrm{Q}_n^{(k)} = 0.$ On en déduit que :

$$\forall k \in \llbracket n ; 2n \rrbracket,\ \mathrm{P}_n^{(k)}(0) = \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \mathrm{Q}_n^{(i)}(0)\ \mathrm{R}_n^{(k-i)}(0) = \frac{1}{n!}\binom{k}{n} \mathrm{Q}_n^{(n)}(0)\mathrm{R}_n^{(k-n)}(0) = \binom{k}{n} \mathrm{R}_n^{(k-n)}(0).$$

Or, $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{R}_n(x) = \mathrm{Q}_n(a-bx).$

Donc $\forall k \in \llbracket n ; 2n \rrbracket,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{R}_n^{(k-n)}(x) = (-b)^{k-n}\mathrm{Q}_n^{(k-n)}(a-bx) = (-b)^{k-n}\dfrac{n!}{(2n-k)!}(a-bx)^{2n-k}.$

D'où, $\forall k \in \llbracket n ; 2n \rrbracket,\ \mathrm{P}_n^{(k-n)}(0) = \dfrac{k!}{n!(k-n)!}(-b)^{k-n}\dfrac{n!}{(2n-k)!}a^{2n-k} = \dfrac{k!}{n!}\dbinom{n}{k-n}(-b)^{k-n}a^{2n-k} \in \mathbb{Z}.$

Il en résulte que : $\mathrm{F}_n(0) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\mathrm{P}_n^{(2k)}(0) = \sum_{n \leq 2k \leq 2n}(-1)^k\mathrm{P}_n^{(2k)}(0) \in \mathbb{Z}.$

De plus, $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{P}_n(\pi - x) = \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{a}{b} - x\right)^n (bx)^n = \mathrm{P}_n(x).$

Donc $\forall k \in \llbracket 0 ; n \rrbracket, \forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{P}_n^{(2k)}(\pi - x) = \mathrm{P}_n^{(2k)}(x).$

En particulier, $\forall k \in \llbracket 0 ; n \rrbracket, \mathrm{P}_n^{(2k)}(\pi) = \mathrm{P}_n^{(2k)}(0).$

Par suite, $\mathrm{F}_n(\pi) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\mathrm{P}_n^{(2k)}(\pi) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\mathrm{P}_n^{(2k)}(0) = \mathrm{F}_n(0) \in \mathbb{Z}.$

Théorème

π est un nombre irrationnel.

Démonstration

Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe des entiers naturels non nuls a et b tels que $\pi = \dfrac{a}{b}.$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et P_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{P}_n(x) = \dfrac{1}{n!}\ x^n(a-bx)^n.$

L'application $x \mapsto \mathrm{P}_n(x)\sin(x)$ est continue, positive et non identiquement nulle sur l'intervalle $[0 ; \pi]$.

En posant $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{\pi}\mathrm{P}_n(x)\sin(x)dx,$ on obtient : $\mathrm{I}_n > 0.$

Et on en déduit, d'après les lemmes 2 et 3, que $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{\pi}\mathrm{P}_n(x)\sin(x)dx = \mathrm{F}_n(0) + \mathrm{F}_n(\pi) \in \mathbb{N}^*.$

Par ailleurs, $\forall x \in \mathbb{R},\ x(a-bx) \leqslant \dfrac{a^2}{4b}.$ Donc $\mathrm{I}_n \leqslant \dfrac{1}{n!}\pi\left(\dfrac{a^2}{4b}\right)^n.$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < \mathrm{I}_n \leqslant \frac{1}{n!}\pi\left(\frac{a^2}{4b}\right)^n \text{ avec } \lim_{n \to +\infty}\frac{1}{n!}\pi\left(\frac{a^2}{4b}\right)^n = 0.$$

D'après le théorème d'encadrement, la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

C'est absurde car $\forall n\in\mathbb{N},\ \mathrm{I}_n \geqslant 1.$ De cette contradiction, on en conclut que le nombre π est irrationnel.

d) Approximation diophantienne

Définition 1

Construire une **approximation diophantienne** d'un nombre réel x donné signifie trouver une suite $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres rationnels et une fonction f de limite 0 en l'infini vérifiant : $\forall n\in\mathbb{N}, \left|x-\dfrac{a_n}{b_n}\right| \leqslant f(b_n).$

Théorème 1

Soit x un nombre réel. On suppose qu'il existe une suite $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ avec a_n et b_n entiers relatifs avec $b_n>0$ vérifiant : $\forall n\in\mathbb{N}, 0<\left|x-\dfrac{a_n}{b_n}\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon(n)}{b_n}$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty}\varepsilon(n)=0.$ Alors, x est irrationnel.

Démonstration

Supposons que $\forall n\in\mathbb{N}, 0<\left|x-\dfrac{a_n}{b_n}\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon(n)}{b_n}$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty}\varepsilon(n)=0,$ a_n et b_n entiers relatifs, $b_n>0.$

Raisonnons par l'absurde et écrivons x sous la forme $x=\dfrac{p}{q}$ où p et q sont des entiers relatifs avec $q>0$.

Alors, $\forall n\in\mathbb{N}, 0<\left|\dfrac{pb_n-a_nq}{qb_n}\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon(n)}{b_n}$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty}\varepsilon(n)=0.$

Donc, $\forall n\in\mathbb{N}, 0<|pb_n-a_nq| \leqslant q\varepsilon(n)$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty}\varepsilon(n)=0.$

Par le théorème d'encadrement, la suite $(|pb_n-a_nq|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

En particulier, il existe un entier naturel N tel que $0<|pb_{\mathrm{N}}-a_{\mathrm{N}}q| \leqslant \dfrac{1}{2}.$ Ce qui est impossible car $|pb_{\mathrm{N}}-a_{\mathrm{N}}q|$ est un entier naturel non nul.

Exemple

Les nombres de Fermat F_n sont définis sur $\mathbb{N}$ par $\mathrm{F}_n=2^{2^n}+1.$

On se propose de démontrer que le nombre $s=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\mathrm{F}_n}$ est irrationnel.

Pour tout nombre réel x tel que $|x|<1,$ on pose : $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2^n}}{1-x^{2^n}}$ et $g(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2^n}}{1+x^{2^n}}.$

i) Démontrons que, pour tout nombre réel x tel que $|x|<1,$ $f(x)-g(x)=2\left(f(x)-\dfrac{x}{1-x}\right).$

Pour tout nombre réel x tel que $|x|<1$, on a :

$$f(x)-g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x^{2^n}}{1-x^{2^n}}-\frac{x^{2^n}}{1+x^{2^n}}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2x^{2^{n+1}}}{1-x^{2^{n+1}}}=2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2^{n+1}}}{1-x^{2^{n+1}}}=2\left(f(x)-\frac{x}{1-x}\right).$$

***ii*)** Démontrons que $f\left(\frac{1}{2}\right)$ est irrationnel.

Par définition : $f\left(\frac{1}{2}\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^{2^k}-1}+\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{2^{2^k}-1}.$

Pour tous entiers n et k tels que $k\leqslant n$, $2^{2^k}-1$ divise $2^{2^n}-1$

car $2^{2^n}-1=\left(2^{2^k}\right)^{2^{n-k}}-1=\left(2^{2^k}-1\right)\left(\left(2^{2^k}\right)^{2^{n-k}-1}+\left(2^{2^k}\right)^{2^{n-k}-2}+\ldots+1\right).$

De plus,

$$\left(2^{2^n}-1\right)f\left(\frac{1}{2}\right)-\left(2^{2^n}-1\right)\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^{2^k}-1}=\left(2^{2^n}-1\right)\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{2^{2^k}-1}\quad\text{et}\quad 0<\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{2^{2^k}-1}\leqslant\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{\frac{1}{2}2^{2^k}}.$$

Donc : $0<\left(2^{2^n}-1\right)f\left(\frac{1}{2}\right)-\left(2^{2^n}-1\right)\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^{2^k}-1}<\left(2^{2^n}-1\right)\frac{1}{2^{2^{n+1}-1}}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k.$

On a : $0<a_n f\left(\frac{1}{2}\right)+b_n<\varepsilon(n)$ avec $\lim_{n\to+\infty}\varepsilon(n)=0$, $a_n\in\mathbb{Z}$, $b_n\in\mathbb{Z}$.

Ainsi d'après le théorème 1, $f\left(\frac{1}{2}\right)$ est irrationnel.

***iii*)** Démontrons que $s=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\mathrm{F}_n}$ est irrationnel.

Comme $f\left(\frac{1}{2}\right)=-g\left(\frac{1}{2}\right)+2$, d'après le *i*), $g\left(\frac{1}{2}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\mathrm{F}_n}$ est irrationnel.

e) Le nombre ζ(3)

La fonction zêta de Riemann est définie pour tout complexe z tel que $\mathrm{Re}(z)>1$, par :

$$\zeta(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^z}.$$

Euler avait déjà pensé à utiliser cette série avec s réel strictement supérieur à 1. L'idée de génie de Riemann est de l'avoir prolongée au plan complexe, donnant ainsi naissance à une nouvelle fonction, méromorphe sur $\mathbb{C}$, comportant en son sein plus de renseignements.

Dès la seconde moitié du XIX^e siècle, une étude très poussée de cette fonction, menée conjointement avec des progrès constants en analyse complexe, a permis d'obtenir une démonstration du théorème suivant.

Théorème des Nombres Premiers (TNP forme faible)

Si, pour tout réel $x \geqslant 2$, $\pi(x)$ désigne le nombre de nombres premiers p inférieurs ou égaux à x, alors

$$\pi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{\ln(x)}.$$

En particulier, Hadamard et De la Vallée Poussin ont démontré que le TNP découlait pratiquement du seul fait que $\forall t \in \mathbb{R},\ \zeta(1+it) \neq 0$ (*), ainsi que d'estimations de $|\zeta(s)|$ et $|\zeta'(s)|$ dans une certaine région du plan. D'ailleurs, si l'on ne souhaite qu'une forme faible du TNP, alors l'utilisation de (*), combinée à un théorème taubérien (théorème de Ikehara), est suffisante.

Remarque

Il existe une unique suite (B_n) de polynômes appelés polynômes de Bernoulli, vérifiant les trois conditions suivantes :

$$\begin{cases} \mathrm{B}_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{B}'_{n+1} = (n+1)\mathrm{B}_n \\ \forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 \mathrm{B}_{n+1}(t)dt = 0 \end{cases}.$$

On montre que, pour tout entier naturel n, $\boxed{\zeta(2n) = (-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}\mathrm{B}_{2n}(0)\pi^{2n}}$.

Voici quelques valeurs de $\zeta(2n)$:

n	1	2	3	4	5	6	10
$\zeta(2n)$	$\frac{\pi^2}{6}$	$\frac{\pi^4}{90}$	$\frac{\pi^6}{945}$	$\frac{\pi^8}{9\,450}$	$\frac{\pi^{10}}{93\,555}$	$\frac{\pi^{12}}{638\,512\,875}$	$\frac{\pi^{20}}{1\,531\,329\,465\,290\,625}$

L'arithmétique des $\zeta(2n)$ est bien connue, et ce, depuis fort longtemps, celle des $\zeta(2n+1)$ demeure, quant à elle, beaucoup plus mystérieuse.

Le premier résultat intéressant obtenu par **Apéry** date de plus d'une trentaine d'années (1978). Il démontre l'irrationalité du nombre $\zeta(3)$. La méthode utilisée était relativement compliquée. Néanmoins, elle présentait l'avantage de reposer sur une théorie élémentaire des nombres relativement accessible.

Il construisait une suite $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres rationnels vérifiant la propriété :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left|\zeta(3) - \frac{a_n}{b_n}\right| \leqslant \frac{1}{b_n^{1,08}} \text{ avec } \zeta(3) \neq \frac{a_n}{b_n}.$$

L'année suivant cette découverte, **Beukers** parvint à élaborer une preuve plus simple de ce même résultat qui s'appuie sur la construction d'une suite de formes linéaires à coefficients entiers en 1 et $\zeta(3)$ qui converge vers 0.

Lemme 1

Il existe un entier $n_0 \geqslant 2$ tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, on ait : $ppcm(1\ ;\ 2\ ;\ \ldots\ ;\ n) < 3^n$.

Preuve

Considérons un entier $n \geqslant 2$ et un nombre premier p tel que $2 \leqslant p \leqslant n$.
La valuation p-adique de l'entier n, notée $v_p(n)$, est le plus grand entier k tel que p^k divise n.
Nous disposons de la formule suivante : $ppcm(1\ ;\ 2\ ;\ \ldots\ ;\ n) = \prod\limits_{\substack{p \text{ premier} \\ 2\ \leqslant\ p\ \leqslant n}} p^{\max\left\{v_p(k)\ ;\ k\ \in\ \ 1\ ;\ n\ \right\}}$.

Comme $0 \leqslant \left[\dfrac{\ln(n)}{\ln(p)}\right] \leqslant \dfrac{\ln(n)}{\ln(p)}$, on a : $1 \leqslant p^{\left[\frac{\ln(n)}{\ln(p)}\right]} \leqslant p^{\frac{\ln(n)}{\ln(p)}} = e^{\frac{\ln(n)}{\ln(p)}\times\ln(p)} = n$ et donc $p^{\left[\frac{\ln(n)}{\ln(p)}\right]} \in\ \ 1\ ;\ n\ \ $.

D'où, $\left[\dfrac{\ln(n)}{\ln(p)}\right] = v_p\left(p^{\left[\frac{\ln(n)}{\ln(p)}\right]}\right) \leqslant \max\left\{v_p(k)\ ;\ k\ \in\ \ 1\ ;\ n\ \right\}$.

Il existe $j\ \in\ \ 1\ ;\ n\ \ $ tel que $v_p(j) = \max\left\{v_p(k)\ ;\ k\ \in\ \ 1\ ;\ n\ \right\}$.

Par définition de la valuation, $p^{v_p(j)}$ divise j donc $p^{v_p(j)} \leqslant j \leqslant n$ et $v_p(j)\ln(p) \leqslant \ln(n)$.

Puisque $v_p(j) \in \mathbb{N}$ et $v_p(j) \leqslant \dfrac{\ln(n)}{\ln(p)}$, on obtient : $\max\left\{v_p(k)\ ;\ k\ \in\ \ 1\ ;\ n\ \right\} = v_p(j) \leqslant \left[\dfrac{\ln(n)}{\ln(p)}\right]$.

Il en résulte que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $ppcm(1\ ;\ 2\ ;\ \ldots\ ;\ n) = \prod\limits_{\substack{p \text{ premier} \\ 2\ \leqslant\ p\ \leqslant n}} p^{\left[\frac{\ln(n)}{\ln(p)}\right]}$.

Le théorème des nombres premiers exprime que $\pi(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{\ln(n)}$ où $\pi(n)$ désigne $\sum\limits_{\substack{p \text{ premier} \\ 2\ \leqslant\ p\ \leqslant n}} 1$.

Donc, pour tout entier $n \geqslant 2$, $\prod\limits_{\substack{p \text{ premier} \\ 2\ \leqslant\ p\ \leqslant n}} p^{\left[\frac{\ln(n)}{\ln(p)}\right]} \leqslant \prod\limits_{\substack{p \text{ premier} \\ 2\ \leqslant\ p\ \leqslant n}} p^{\frac{\ln(n)}{\ln(p)}} = \prod\limits_{\substack{p \text{ premier} \\ 2\ \leqslant\ p\ \leqslant n}} n = n^{\pi(n)} = n^{\frac{n}{\ln(n)}(1+o(1))} = e^{n(1+o(n))}$.

Il existe un entier $n_0 \geqslant 2$ tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, on ait : $0 < 1 + o(n) < 1$.
Or $e < 3$. Il s'ensuit que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, $ppcm(1\ ;\ 2\ ;\ \ldots\ ;\ n) < 3^n$.

Lemme 2

$\forall (x,y,z) \in \left]0\ ;\ 1\right[^3,\ \dfrac{x(1-x)y(1-y)z(1-z)}{1-\left(1-yz\right)x} \leq \left(\sqrt{2}-1\right)^4$.

Preuve

Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ 1[^3$ par : $(x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = \dfrac{x(1-x)y(1-y)z(1-z)}{1-\left(1-yz\right)x}$.

On cherche les points critiques de f c'est-à-dire tels que $\dfrac{\partial}{\partial x} f(x,y,z) = \dfrac{\partial}{\partial y} f(x,y,z) = \dfrac{\partial}{\partial z} f(x,y,z) = 0$.

- $\forall (x,y,z)\in \left]0\ ;\ 1\right[^3,\ \dfrac{\partial}{\partial x} f(x,y,z) = y(1-y)z(1-z)\dfrac{\left[(1-2x)\left(1-(1-yz)x\right)+\left(x-x^2\right)(1-yz)\right]}{(1-(1-yz)x)^2}$.

Comme y et z sont différents de 0 et 1, on a :

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z)=0 \Leftrightarrow 1-2x-(1-2x)(x-xyz)+x-x^2-xyz+x^2yz=0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z)=0 \Leftrightarrow 1-2x-x+xyz+2x^2-2x^2yz+x-x^2-xyz+x^2yz=0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z)=0 \Leftrightarrow -x^2yz+x^2-2x+1=0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z)=0 \Leftrightarrow (1-yz)x^2-2x+1=0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z)=0 \Leftrightarrow 1-yz=\frac{2x-1}{x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z)=0 \Leftrightarrow 1-\frac{2x-1}{x^2}=yz$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z)=0 \Leftrightarrow \frac{x^2-2x+1}{x^2}=yz$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z)=0 \Leftrightarrow y=\frac{(x-1)^2}{x^2z}}$$

- $\forall (x,y,z)\in \left]0\ ;\ 1\right[^3,\ \dfrac{\partial}{\partial y} f(x,y,z) = x(1-x)z(1-z)\dfrac{\left[(1-2y)\left(1-(1-yz)x\right)-\left(y-y^2\right)xz\right]}{(1-(1-yz)x)^2}$.

Comme x et z sont différents de 0 et 1, on a :

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z)=0 \Leftrightarrow 1-2y-(1-2y)(x-xyz)-xyz+xy^2z=0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z)=0 \Leftrightarrow 1-2y-x+xyz+2xy-2xy^2z-xyz+xy^2z=0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z)=0 \Leftrightarrow -xzy^2+(2x-2)y-x+1=0$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z)=0 \Leftrightarrow -xzy^2+2(x-1)y-x+1=0}.$$

- Vu la symétrie, en remplaçant y par z et z par y dans les calculs précédents, on obtient : $\forall (x,y,z)\in \left]0\ ;\ 1\right[^3,\ \dfrac{\partial}{\partial z} f(x,y,z) = x(1-x)y(1-y)\dfrac{\left[(1-2z)\left(1-(1-yz)x\right)-\left(z-z^2\right)xy\right]}{(1-(1-yz)x)^2}$.

Comme x et y sont différents de 0 et 1, on a : $\boxed{\dfrac{\partial}{\partial z} f(x,y,z)=0 \Leftrightarrow -xyz^2+2(x-1)z-x+1=0}$.

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} f(x,y,z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{(x-1)^2}{x^2 z} \\ -xyz^2 + 2(x-1)z - x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{(x-1)^2}{x^2 z} \\ -xz^2 \frac{(x-1)^2}{x^2 z} + 2(x-1)z - x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{(x-1)^2}{x^2 z} \\ -\frac{z(x-1)^2}{x} + 2(x-1)z - x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{(x-1)^2}{x^2 z} \\ -x^2 z + 2xz - z + 2x^2 z - 2xz - x^2 + x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{(x-1)^2}{x^2 z} \\ (x^2-1)z - x^2 + x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{(x-1)^2}{x^2 z} \\ z = \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{(x-1)^2}{x^2 z} \\ z = \frac{(x-1)x}{(x-1)(x+1)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{(x-1)^2}{x^2 z} \\ z = \frac{x}{x+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{(x-1)^2 (x+1)}{x^3} \\ z = \frac{x}{x+1} \end{cases}$$

Pour des raisons de symétrie, en remplaçant y par z et z par y dans les calculs précédents, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{(x-1)^2 (x+1)}{x^3} \\ y = \frac{x}{x+1} \end{cases}.$$

D'où, il vient :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} f(x,y,z) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{x}{x+1} \\ z = \frac{x}{x+1} \\ -xzy^2 + 2(x-1)y - x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x}{x+1} \\ z = \frac{x}{x+1} \\ -\frac{x^4}{(x+1)^3} + \frac{2x^2 - 2x}{x+1} - x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x}{x+1} \\ z = \frac{x}{x+1} \\ -x^4 + (2x^2 - 2x)(x^2 + 2x + 1) + (-x+1)(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x}{x+1} \\ z = \frac{x}{x+1} \\ -x^4 + 2x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 2x^3 - 4x^2 - 2x - x^4 - 3x^3 - 3x^2 - x + x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{x}{x+1} \\ z = \dfrac{x}{x+1} \\ -2x^2+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}+1} \\ z = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}+1} \\ x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \text{ (car } x \in \left]0\ ;\ 1\right[) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{1+\sqrt{2}} \\ z = \dfrac{1}{1+\sqrt{2}} \\ x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{2}-1 \\ z = \sqrt{2}-1 \\ x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Or, $\dfrac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3} = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right) = -\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right) = \sqrt{2}-1.$

Ainsi, on en déduit que : $\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} f(x,y,z) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial y} f(x,y,z) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial z} f(x,y,z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{2}-1 \\ z = \sqrt{2}-1 \\ x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}.$

La fonction *f* admet donc un seul point critique $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}-1, \sqrt{2}-1\right)$.

Pour montrer que *f* admet un maximum local strict en $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}-1, \sqrt{2}-1\right)$, il suffit de prouver que la forme quadratique définie sur $]0\ ;\ 1[^3$ par : $Q(h_1,h_2,h_3) = \sum_{1\le i,j\le 3} h_i h_j \dfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}-1, \sqrt{2}-1\right)$ est négative et non dégénérée.

À l'heure où je reprends ce travail, je me prends à philosopher, les mathématiques ne se résument pas à des pages de calcul, n'est-ce pas ?
Faisons une petite halte, en admettant que les valeurs propres de la Hessienne de *f* en $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}-1, \sqrt{2}-1\right)$ sont réelles et strictement négatives.
Christian (Mauduit) n'aurait-il pas voulu, en me lançant dans l'étude de l'irrationalité de $\zeta(3)$, tester ici ma résistance à l'effort ou me communiquer tout simplement l'envie de faire des mathématiques ?
Moi, le simple professeur de lycée, qui travaille à temps plein, éloigné du monde de la recherche depuis tant d'années, relève le défi, non sans peine, comme vous pouvez le constater, pour le simple plaisir de faire des mathématiques …

Je conseille vivement la lecture de l'ouvrage « *Les mathématiques, plaisir et nécessité* » d'Albert Ducrocq et André Warusfel, édité en 2001, aux éditions Vuibert.

L'admiration, a-t-on dit, est le principe du savoir [...] ; je m'autoriserai de cette pensée pour exprimer le désir qu'on fasse la part plus large, pour les étudiants, aux choses simples et belles.

Charles Hermite

Ô mathématiques sévères, je ne vous ai pas oubliées depuis que vos savantes leçons, plus douces que le miel, filtrèrent dans mon cœur comme une onde rafraîchissante.

Lauréatmont, Les chants de Maldoror (Chant deuxième)

Cette deuxième année de Master est sur le point de se terminer, cela me rend mélancolique. Je ne sais pas comment l'expliquer.
Est-ce le travail qui me reste à faire pour préparer le dernier examen de didactique ? Ou la rédaction de mon mémoire qui m'attend pour les vacances d'été ? Ou encore le désir de me lancer dans une nouvelle aventure, celle de préparer une thèse de doctorat l'an prochain ?
Il y a certainement un peu de tout cela …
En tous cas, je tiens à remercier ici sincèrement et chaleureusement l'ensemble de l'équipe professorale d'avoir partagé avec nous, les étudiants de ce Master, une partie de leurs connaissances.
Vous êtes parvenus à rallumer en moi cette flamme, l'envie d'apprendre et de comprendre les mathématiques et également la manière de les enseigner.
Cela a été un réel plaisir de faire partie de cette promotion si sympathique et solidaire.

Revenons-en au calcul du maximum :

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}-1,\sqrt{2}-1\right)=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{2-\sqrt{2}}{2}\times\left(\sqrt{2}-1\right)^2\times\left(2-\sqrt{2}\right)^2}{1-\left(1-\left(\sqrt{2}-1\right)^2\right)\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\frac{\sqrt{2}-1}{2}\times\left(\sqrt{2}-1\right)^2\times 2\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{1-\left(1-\left(2-2\sqrt{2}+1\right)\right)\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}-1,\sqrt{2}-1\right)=\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^5}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-2+2\sqrt{2}\right)}=\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^5}{1+\sqrt{2}-2}$$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}-1,\sqrt{2}-1\right)=\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^5}{\sqrt{2}-1}=\boxed{\left(\sqrt{2}-1\right)^4}.$$

Il en résulte que : $\forall(x,y,z)\in\left]0\,;\,1\right[^3,\ \dfrac{x(1-x)y(1-y)z(1-z)}{1-\left(1-yz\right)x}\leq\left(\sqrt{2}-1\right)^4.$

<u>Lemme 3</u>

Soient p et q deux entiers naturels.

Si $p > q$, alors $\displaystyle\int_0^1\int_0^1\frac{-\log(xy)}{1-xy}x^p x^q dxdy\in\mathbb{Q}$.

Si $p = q$, alors $\displaystyle\int_0^1\int_0^1\frac{-\log(xy)}{1-xy}x^p x^q dxdy=2\left[\zeta(3)-\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n^3}\right]\in\mathbb{Q}$.

Preuve

On pose $I(p,q,r)=\int_0^1\int_0^1 \frac{x^{p+r}y^{q+r}}{1-xy}dxdy$.

Supposons que $|xy|<1$.

Alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty}(xy)^n$ converge et a pour somme $\frac{1}{1-xy}$.

On en déduit que :

$$I(p,q,r)=\int_0^1\int_0^1 \frac{x^{p+r}y^{q+r}}{1-xy}dxdy$$

$$I(p,q,r)=\int_0^1\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} x^{p+r+n}y^{q+r+n}dxdy$$

$$I(p,q,r)=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1\int_0^1 x^{p+r+n}y^{q+r+n}dxdy \text{ (par convergence uniforme)}$$

$$I(p,q,r)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(p+r+n+1)(q+r+n+1)}.$$

Si $p > q$, la somme vaut : $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{p-q}\left[\frac{1}{n+q+r+1}-\frac{1}{n+p+r+1}\right]=\frac{1}{p-q}\left[\frac{1}{q+1+r}+\ldots+\frac{1}{p+r}\right].$

On différencie par rapport à r :

$$\frac{d}{dr}I(p,q,r)=\int_0^1\int_0^1 \frac{\ln(xy)x^{p+r}y^{q+r}}{1-xy}dxdy$$

$$\frac{d}{dr}I(p,q,r)=\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{p-q}\left[\frac{1}{q+1+r}+\ldots+\frac{1}{p+r}\right]\right)$$

$$\frac{d}{dr}I(p,q,r)=-\frac{1}{p-q}\left[\frac{1}{(q+1+r)^2}+\ldots+\frac{1}{(p+r)^2}\right].$$

Le premier point s'obtient en choisissant $r = 0$.

Si $p = q$, on obtient : $\int_0^1\int_0^1 \frac{x^{p+r}y^{q+r}}{1-xy}dxdy=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+p+r+1)^2}.$

On différencie selon r et on évalue en 0 pour trouver le deuxième point.

Théorème

Le nombre $\zeta(3)$ est irrationnel.

Preuve

On pose $J=-\int_0^1\int_0^1 \frac{-\log(xy)}{1-xy}P_n(x)P_n(y)dxdy=(A_n+B_n\zeta(3))\,ppcm(1\ ;\ 2\ ;\ \ldots\ ;\ n)^3$

où A_n et B_n sont des entiers.

On a : $-\dfrac{\log(xy)}{1-xy}=\int_0^1 \dfrac{1}{1-(1-xy)z}dz.$

Donc $J=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \dfrac{P_n(x)P_n(y)}{1-(1-xy)z}dxdydz \overset{n-IPP/x}{=} \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \dfrac{(xyz)^n(1-x)^n P_n(y)}{(1-(1-xy)z)^{n+1}}dxdydz.$

On fait un changement de variable involutif $w=\dfrac{1-z}{(1-(1-xy)z)}$ pour trouver :

$$J=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 (1-x)^n(1-w)^n\dfrac{P_n(y)}{1-(1-xy)z}dxdydz$$

$$J\overset{n-IPP/y}{=}\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \dfrac{x^n(1-x)^n y^n(1-y)^n w^n(1-w)^n}{(1-(1-xy)w)^{n+1}}dxdydw$$

$$J\le\left(\sqrt{2}-1\right)^{4n}\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \dfrac{1}{(1-(1-xy)w)^{n+1}}dxdydw$$

$$J\le\left(\sqrt{2}-1\right)^{4n}\int_0^1\int_0^1 \dfrac{\ln(xy)}{1-xy}dxdydw$$

$$J\le 2\left(\sqrt{2}-1\right)^{4n}\zeta(3).$$

$J\neq 0$ donc pour n assez grand,

$$0\le\left|A_n+B_n\zeta(3)\right|\le 2\zeta(3)\left(\sqrt{2}-1\right)^{4n} ppcm(1\ ;\ 2\ ;\ ...\ ;\ n)^3\le 2\zeta(3)\left(\sqrt{2}-1\right)^{4n}27^n\le 2\zeta(3)0{,}8^n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

(car 0 < 0,8 < 1).

On en conclut que le nombre $\zeta(3)$ est irrationnel.

Annexe

Théorème 1 (Convergence dominée pour une suite de fonctions)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.
On suppose que les deux conditions suivantes sont remplies :

- **a)** La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I ;
- **b)** Il existe une fonction φ continue par morceaux sur I, à valeurs réelles positives et intégrable sur I telle que : $\forall n\in\mathbb{N},\ |f_n| \leqslant \varphi$ sur I (*hypothèse de domination*).

Alors, f est intégrable sur I et $\int_{\mathrm{I}} f = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathrm{I}} f_n$.

Théorème 2 (Convergence dominée pour les séries de fonctions)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

On note : $\forall n\in\mathbb{N},\ \mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

On suppose que les deux conditions suivantes sont remplies :

- **a)** La série $\sum u_n$ de fonctions converge simplement sur I, et sa fonction somme $\mathrm{S} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. est continue par morceaux sur I ;
- **b)** Il existe une fonction φ continue par morceaux sur I, à valeurs réelles positives et intégrable sur I telle que : $\forall n\in\mathbb{N},\ |\mathrm{S}_n| \leqslant \varphi$ sur I (*hypothèse de domination*).

Alors, toutes les fonctions u_n ainsi que S, sont intégrables sur I, la série $\sum \int_{\mathrm{I}} u_n$ converge et $\int_{\mathrm{I}} \mathrm{S} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathrm{I}} u_n$.

Théorème 3 (Convergence d'une série de fonctions en norme 1)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.
On suppose que les trois conditions suivantes sont remplies :

- **a)** La série $\sum u_n$ de fonctions converge simplement sur I, et sa fonction somme S est continue par morceaux sur I ;
- **b)** $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n$ est intégrable sur I ;
- **c)** La série $\sum \int_{\mathrm{I}} |u_n|$ converge.

Alors, $\mathrm{S} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est intégrable sur I, la série $\sum \int_{\mathrm{I}} u_n$ converge et $\int_{\mathrm{I}} \mathrm{S} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathrm{I}} u_n$.

Théorème 4 (Interversion série-intégrale lorsque l'intervalle d'intégration est un segment)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur un segment $[a\,;b]$ de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.
On suppose que la série $\sum u_n$ de fonctions converge uniformément sur $[a\,;b]$, et sa fonction somme S est continue par morceaux sur $[a\,;b]$.

Alors, la série $\sum \int_a^b u_n$ converge et $\int_a^b \mathrm{S} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n$.

Bibliographie

Les sites Internet mentionnés dans cette recherche étaient actifs à la date du 15 mai 2013.

Assude, T. (1992). *Un phénomène d'arrêt de la transposition didactique. Écologie de l'objet « Racine carrée » et analyse du curriculum*. Thèse de doctorat, Université Aix-Marseille I, Marseille, France.

Attali, P., Collet, M., Gautier, C., Nicolas, S., Warusfel, A. (2002). Qu'est-ce qu'une limite ? In *Mathématiques, cours et exercices*, *Analyse.* p. 2-4. Paris : Vuibert.

Bourbaki, N. (1974). *Éléments d'histoire des mathématiques*, nouvelle édition revue, corrigée et augmentée. Paris : Hermann.

Bouvier, A. (2005). *Dictionnaire des mathématiques*. Paris : PUF (Collection Quadrige Dico Poche).

Carrega, J.-C. (1981). *Théorie des corps. La règle et le compas*. Paris : Hermann.

Chevallard, Y. (1994). Les processus de transposition didactique et leur théorisation. In Arsac, G., Chevallard, Y., Martinand, J.-L., Tiberghien, A., (eds), *La transposition didactique à l'épreuve*, p. 135-180, Grenoble, Éditions La Pensée sauvage.
http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Les_processus_de_transposition.pdf

Chevallard, Y. (2006). La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD. In *XV*^{e} *école d'été de didactique des mathématiques*, p. 81-108, Clermont-Ferrand (Puy-de-Dôme), du 16 au 23 août 2009, Éditions La Pensée Sauvage, volume 1.

Chevallard, Y. (2010). *Le sujet apprenant entre espace et dispositif. Commentaires depuis la théorie anthropologique du didactique*. Journées du Lisec, Gérardmer.
http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Commentaires_depuis_la_TAD_YC_.pdf

Chevallard, Y. (2011). *Les problématiques de la recherche en didactique à la lumière de la TAD.*
http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/YC_Acadis_28-01-2011_Notes1.pdf

Choimet, D., Queffélec, H. (2009). *Analyse mathématique. Grands théorèmes du vingtième siècle*. Paris : Calvage & Mounet.

Dahan-Dalmedico, A., Peiffer, J. (1986). *Une histoire des mathématiques. Routes et dédales.* p. 204-205. Paris : Seuil.

Dantzer, J.-F. (2007). Vitesse et accélération de convergence de suites réelles. In *Mathématiques pour l'agrégation, analyse et probabilités*, p. 147-159. Paris : Vuibert.

Ducrocq, A., Warusfel, A. (2001). « *Les mathématiques, plaisir et nécessité* ». Paris : Vuibert.

Duverney, D. (2007). *Théorie des nombres*. Paris : Dunod, 2de édition.

Hardy, G.H., Wright, E.M. (1938). *An Introduction to the Theory of Numbers*. Oxford : Oxford University Press, 5th edition (1979).

Monier, J.-M. (1996). *Analyse 1. Analyse*. Paris : Dunod.

Perrin, D. (2005). *Mathématiques d'école. Nombres, mesures et géométrie*. Paris : Cassini.