Mémoire UE34 (Master Didactique des Mathématiques)
Olivier Schettino

Année 2012/2013

# Recherche et représentation

## Présentation

J'ai cherché à me mettre dans la position du chercheur en me donnant un problème non résolu et en essayant de trouver des moyens de le comprendre.

J'ai choisi de m'intéresser au développement décimal des nombres.

L'idée étant de repérer une structure dans la manière dont les décimales d'un nombre se développe ou l'absence de structure.

La structure la plus facile qu'il m'est apparu de mettre en évidence est celle d'une structure géométrique.

J'ai imaginé que l'outil informatique me permettrait de réaliser ce passage du nombre à la forme.

Une fois la forme repérer essayer de l'interpréter en terme de structure algébrique.

## Méthode

Pour cela j'ai décidé au vue du trop grand nombre de dimensions que m'imposait la base 10 de développer en base 2 puis 4 en imaginant que je pouvais associer à chaque valeur de congruences une direction dans le plan. Car mon idée était que si une structure existe sur les nombres elle doit nécessairement se repérer sur leur représentation géométrique. Et donc inversement une fois la structure géométrique repéré la re-transférer sur la structure des décimales .

## Outils

Du fait que je ne m'intéressais qu'au développement décimal d'un nombre je me suis placé sur $[0,1]$ et j'ai donc pris un nombre $x$ tel que $\forall q \geq 2, q \in \mathbb{N}, \exists (x_0, x_1, ....)\ x = \frac{x_1}{q} + \frac{x_2}{q^2} + ...$

et un opérateur définit par $T_q : x \in [0,1] \to qx - [qx]$ ou$[qx]$ désigne la partie entière de $qx$ .

Il est facile de voir que $qx - [qx] \in [0,1]$ et que l'on peut donc itérer cet opérateur et définir $\forall i \geq 1\ T_q^i(x) = \underbrace{T_q \circ ... \circ T_q}_{i\ fois}(x)$ et $T_q^0 = Id$ donc on a $\forall i \geq 1\ x_i = \left[ qT_q^{i-1}(x) \right]$

Ce qui nous donne un algorithme de construction de la suite des $x_i, \forall i \geq 1$ .

L'idée géométrique était de donner une «direction» à chaque décimale .

J'ai donc imaginer à partir des connaissances de cours de cette année à la suite de 0 et de 1 ou 0 m'indiquerais un déplacement à gauche et 1 vers le haut et ou le point de départ serait le point de coordonnées (0,0).

Pour cela j'ai utilisé l'opérateur $T_q : x \in [0,1] \to qx - [qx]$ avec q=2 et donc les valeurs des $x_{i=1,2}$ sont sont 0 soit 1.

Et j'ai donc traduit par deux transformations du plan pour chaque valeur des $x_i$

$\theta_{x_i=0} : M_n : \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \to M_{n+1} \begin{pmatrix} a_{n+1} = a_n + 1 \\ b_{n+1} = b_n \end{pmatrix}$ et $\theta_{x_i=1} : M_n : \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \to M_{n+1} \begin{pmatrix} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = b_n + 1 \end{pmatrix}$ avec $M_0 : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Puis j'ai utiliser le tableur excel pour programmer ces transformations que j'ai utiliser pour différentes valeurs de x j'ai alors obtenu des constructions géométriques régulière ou pas (entier , décimaux , rationnel , algébrique , transcendant cf annexe1 ).

**Analyse des premiers résultats**

Le résultats sur les entiers est bien évidement prévisible puisqu'ils n'ont pas de parti décimale. De la même manière on aperçoit nettement une régularité sur la figure pour les nombre rationnels . Ce résultat que je connaissais depuis longtemps ( La périodicité du développement rationnel des décimaux) m'a confirmé dans l'idée que cette représentation était intéressante pour «voir» les nombres.

Par contre le tracé des nombres algébriques comme $\sqrt{2}$ ou $\pi$ montrait clairement une irrégularité dès le départ.

*Et c'est ouvert alors pour moi deux problèmes :*

-Le premier est de savoir démontrer le cycle c'est à dire d'être capable de prévoir au rang n ou sera le point du plan correspondant ?

-Et inversement si je prends un point du plan quelle sont les nombres qui l'atteigne et en combien d'étapes ? Par quelle chemin ? Et c'est chemin forme une suite de nombre ( A chaque étape ) cette suite de nombre a t'elle des propriétés ?

-Que faire pour les algébriques ou transcendants ?

- Prendre plus de points ?
- Utiliser des méthodes statistiques de régression pour avoir une idée de l'évolution de la suite de décimales.

*Mais aussi un doute :*

La fin des figure par contre ne semblait plus posséder ce même motif régulier or je savais que le développement était périodique et j'étais sur que sur le dessin il devait l'être encore .

Après réflexion je me suis rendu compte que l'algorithme que j'utilisais partait de la connaissance préalable du nombre sur lequel j'essayais de construire une représentation. Ce qui supposait que la machine devait déjà en posséder une de représentation et du coup la précision et le nombre de décimales ne dépendait plus d'un calcul a priori mais de la capacité de la machine (Très faible sur excel 15 décimales) ce qui empêchait toute idée d'émerger à mon sens .

**Des réponses à mes propres question**

-J'ai pensé à changer de langage de programmation bien sur. Mais avant je me suis dit qu'en utilisant un algorithme de calcul des décimales je pourrais trouver plus de décimales . J'ai donc utilisé la suite de Héron pour calculer les décimales des radicaux .

$U_0 = 0; U_{n+1} = \dfrac{U_n + \dfrac{A}{U_n}}{2}$ qui converge vers $\sqrt{A}$ que j'ai ajouté au tableur .

Mais bien entendu, et je ne m'en suis rendu compte qu'après , comme j'utilise le même langage je n'ai pas pas trouvé plus de décimales . Impasse donc .

-Puis j'ai tenté de partir dans l'autre sens en prenant une suite donné de 0 et de 1 et de reconstruire une suite avec un motif déterminé et de chercher à savoir quelle type de nombre j'obtenais. Mais encore que des questions puis je construire un nombre transcendant ou irrationnel à partir de la donnée de la séquence de 0 et de 1? La donnée d'un motif génère t'elle un nombre rationnel particulier ? La reconstruction du nombre est relativement facile par l'opérateur suivant : $R_q : X \in \{1,2,....,q-1\}^N \to x = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{q^i} \in [0,1]$

En prenant alors q=2.Mais la limite de capacité de la machine induit des erreurs d'approximation. Annexe 3

- J'avais aussi dans l'idée de partir dans toutes les directions du plan car j'ai imaginé que la structure devait apparaître encore plus clairement. J'ai alors utilisé une autre base de décomposition avec q=4 et donc les valeurs des $x_{i=1,2}$ sont sont 0,1,2,3.

Et j'ai donc traduit par deux transformations du plan pour chaque valeur des $x_i$

$\theta_{x_i=0} : M_n : \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \to M_{n+1} \begin{pmatrix} a_{n+1} = a_n + 1 \\ b_{n+1} = b_n \end{pmatrix}$ , $\theta_{x_i=1} : M_n : \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \to M_{n+1} \begin{pmatrix} a_{n+1} = a_n - 1 \\ b_{n+1} = b_n \end{pmatrix}$

$\theta_{x_i=2} : M_n : \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \to M_{n+1} \begin{pmatrix} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = b_n + 1 \end{pmatrix}$ ,$\theta_{x_i=0} : M_n : \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \to M_{n+1} \begin{pmatrix} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = b_n - 1 \end{pmatrix}$ avec $M_0 : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

j'ai alors recommencé mes expériences sur les nombres de différentes nature on trouvera en Annexe 2 des graphiques représentatifs. Et même si des motifs apparaissent et qui confirme mon idée de lien entre les nombres et les représentations géométrique. Mais la encore la limite de capacité de calcul de la machine empêchent d'avancer et à plus forte raison car le facteur 4 augmente encore plus vite les convergences que le facteur 2.

**Une autre piste**

Bien que me sentant dans une impasse au niveau de la programmation je me suis demandé si une transformation du codage de 0 et de 1 pouvait se visualiser.

-Pour par exemple «voir» une substitution de Morse.
Je me suis alors donné un alphabet $\{0,1\}$ et des mots sur cet alphabet $\{0,1\}^N$ et la substitution de Morse à savoir $\sigma : \{0,1\}^N \to \{0,1\}^N$ définit par $\sigma(0) = 01$ et $\sigma(1) = 10$ que j'ai appliqué dans différents cas . C'est à dire que à une suite de 0 et de 1 déduite d'un nombre rationnel , algébrique ou transcendant ou même à partir d'une suite générée

aléatoirement j'ai appliqué la substitution de Morse et observé la structure géométrique ainsi crée mais aussi le nombre reconstruit en utilisant la reconstruction R avec q=2 . Les résultats sont en Annexe 3.

-J'ai alors tenté une autre substitution dans le cas ou q=4 $\phi:\{0,1,2,3\}^N \to \{0,1,2,3\}^N \ \sigma(0)=0123, \sigma(1)=1230, \sigma(2)=2310, \sigma(0)=3210,$ mais la concrétisation sur les nombres avec la reconstruction R ainsi crée manque de précision. Et les exemples ne sont pas en assez grand nombre pour permettre une conclusion quelconque.
Par contre à partir d'une suite au hasard de 0 et de 1 j'ai construit une nouvelle suite ou chaque élément de la suite est multipliée par 3 le résultat est surprenant avec différentes coefficients il semble structurer la suite prise au hasard en l'envoyant dans une direction les résultats sont en Annexe 4.

## Perspective :

Je compte bien poursuivre ses recherches qui me passionnent.
Je me fixe les objectifs suivants:

-Utiliser un autre langage de programmation et reprendre les calculs déjà entrepris dans cet ébauche.

-Utiliser d'autre type de transformation dans le plan toujours en fonction des $x_i$
C'est à dire définir les fonction $f_0, g_0, f_1, g_1$ dans les transformations suivantes

$$\theta_{x_i=0}: M_n : \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \to M_{n+1} \begin{pmatrix} a_{n+1} = f_0(a_n, b_n, 1, 0) \\ b_{n+1} = g_0(a_n, b_n, 1, 0) \end{pmatrix} \ \theta_{x_i=1}: M_n : \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \to M_{n+1} \begin{pmatrix} a_{n+1} = f_1(a_n, b_n, 1, 0) \\ b_{n+1} = g_1(a_n, b_n, 1, 0) \end{pmatrix}$$

Et observé les itérations de point enfin de repérer des formes différentes selon les fonctions $f_0, g_0, f_1, g_1$ pour l'instant j'ai utilisé

$$f_0(a_n, b_n, 1, 0) = a_n + 1 ; g_0(a_n, b_n, 1, 0) = b_n ; f_1(a_n, b_n, 1, 0) = a_n ; g_1(a_n, b_n, 1, 0) = b_n + 1;$$

-Prendre le problème en sens inverse en se donnant un point du plan et en essayant de retrouver le chemin déterminé. Puis classer les nombres ainsi obtenu.
C'est à dire soit $M \in \Lambda$ un point du réseau de $\mathbb{R}^2$ à coordonnées entières.
Déterminer N et $(x_i)_{i=1..N}$ avec $x_i = 0 \ ou \ 1$ tel que $\theta_{x_i}^n\left(O_{(0,0)}\right) = M_{(a_N, b_N)}$ et éventuellement le cardinal à N donné de l'ensemble A=$\left\{(x_i)_{i=1..N} \ tel\ que \ \theta_{x_i}^n\left(O_{(0,0)}\right) = M_{(a_N, b_N)}\right\}$ .

-Classer les nombre en fonction de schémas géométrique au moins dans un cercle donné de rayon déterminer .

-Utiliser des substitutions sur les mots pour faire évoluer les schémas et déterminer les propriétés arithmétique qui pourrait lier les nombres construit par deux suites déduites l'une de l'autre par une substitution donné .

-Essayer d'explorer plus loin l'idée qui consiste à multiplier les éléments de la suite par un coefficient.

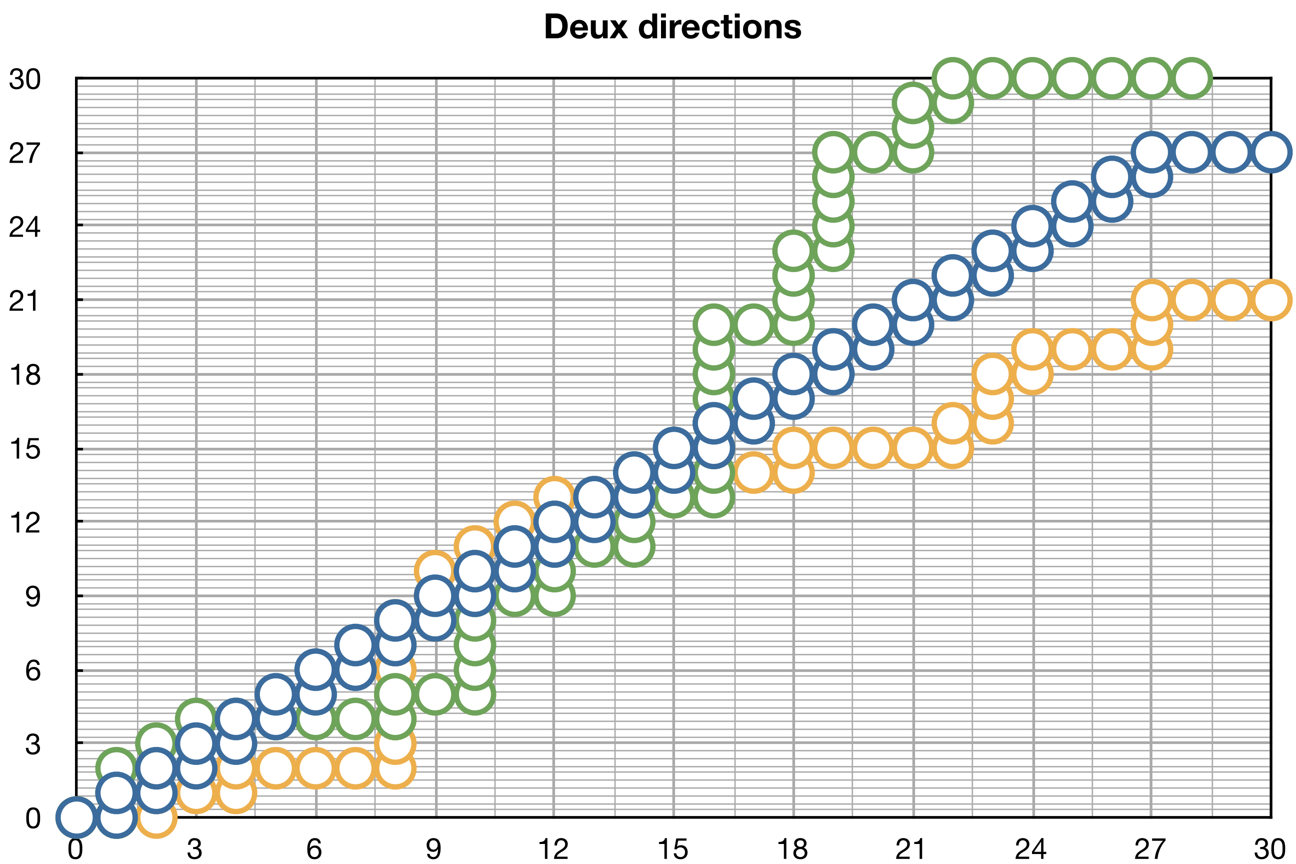
Soit $\sigma:\{0,1\}^N \to \{0,1\}^N$ et $(x_i)_{i=1..N}$ avec $x_i = 0 \; ou \; 1$ on construit $(y_i)_{i=1..M} = \sigma\left((x_i)_{i=1..M}\right)$ puis $x = \sum_{i=1}^{M} \frac{x_i}{2^i}$ et $y = \sum_{i=1}^{M} \frac{y_i}{2^i}$ pour comparer x et y .

## Conclusion

Ce travail m'a passionné ... je compte bien le poursuivre dans les prochains mois ou année.
Je me suis rendu compte de la difficulté de cerner le sujet , de ne pas s'éloigner d'une problématique donné . De savoir reprendre son chemin régulièrement dans différentes direction, d'aller chercher des résultats annexes et parfois éloigné du thème de recherche afin de comprendre et essayer d'avancer .

Mais on est dans le contraire exacte de ce que l'on attend des élèves dans nos classes et même de la formation des enseignants. Une exception toutefois par rapport à l'informatique ou dans les classes les élèves sont confrontés à des comportements similaires.

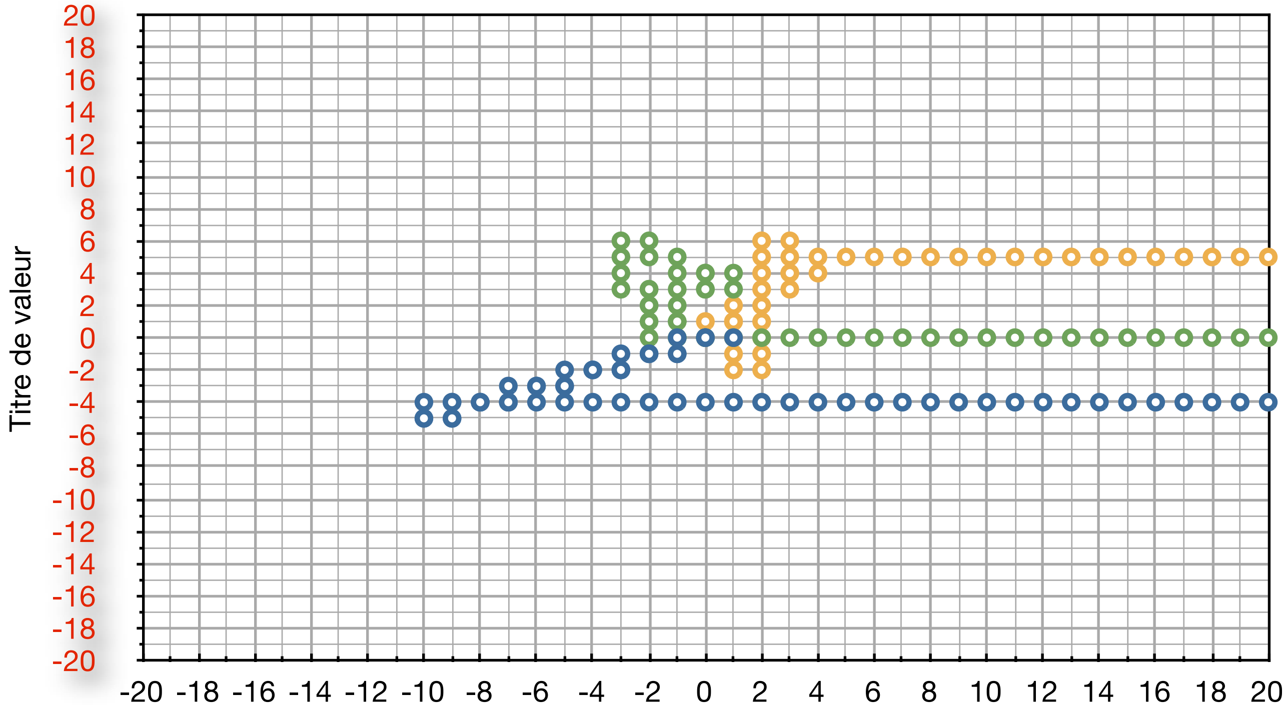
Annexe 1




Bleu : 1/3 , Vert : $\sqrt{2}$ , Orange : $\pi$

La structure régulière du rationnel apparait clairement et l'absence de structure des autres aussi.

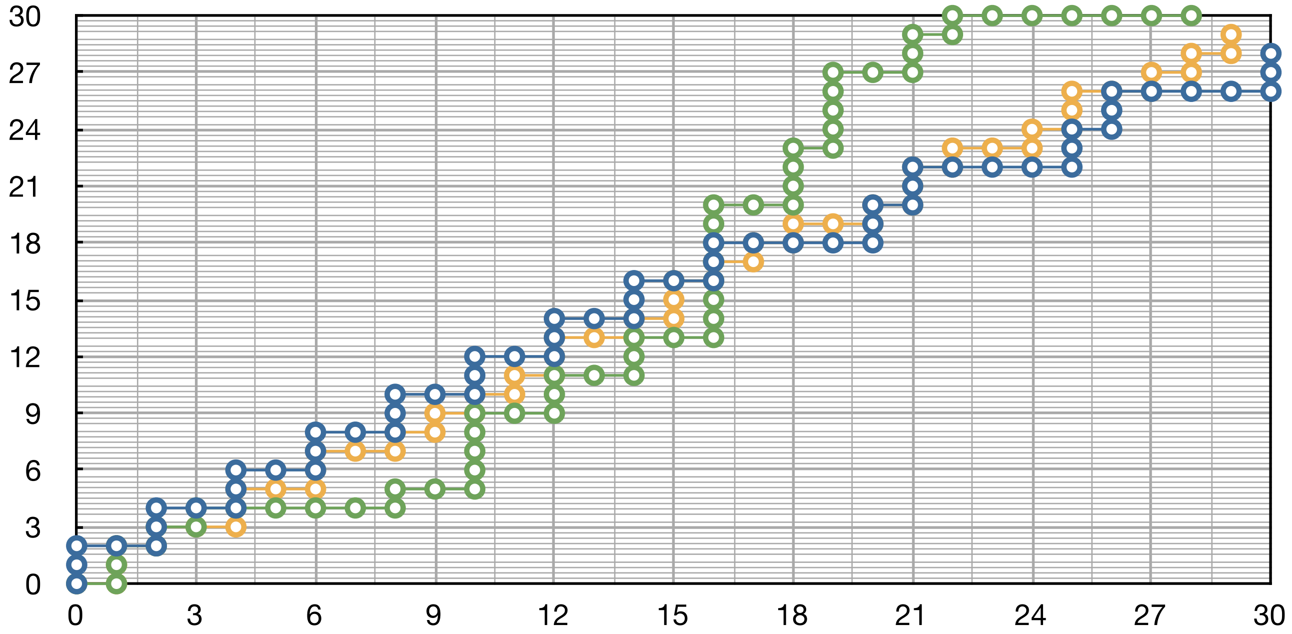
Annexe 2




Bleu : 1/11 ,Vert Vert : $\sqrt{2}$ , Orange: $\pi$

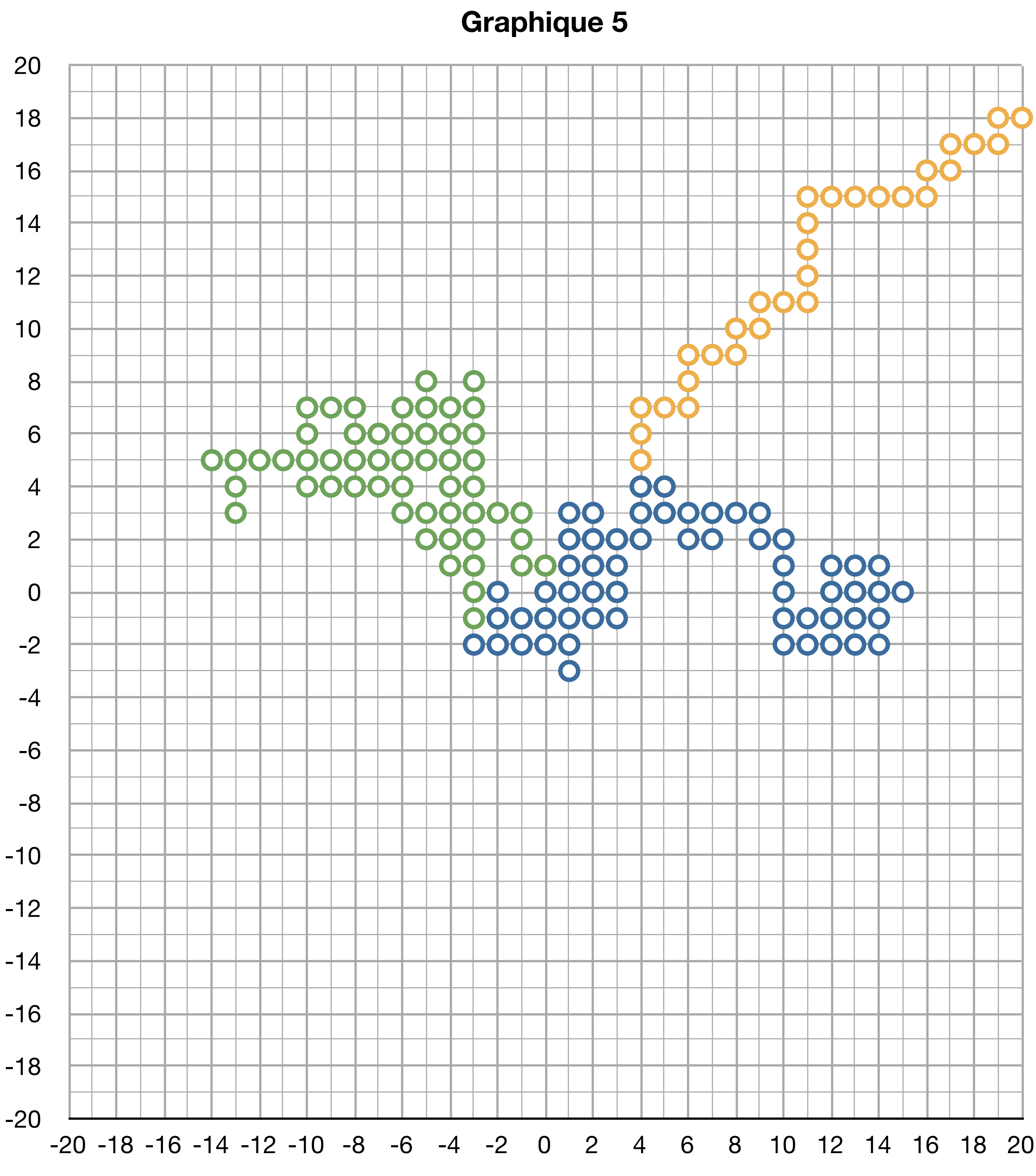
On voit nettement la limite de capacité de calcul qui ramène tout en ligne horizontal et donc $x_i = 0$ à partir d'un certain rang.

Annexe 3




Bleu : Nombre construit à partir de la suite 111000 en boucle
Bleu : $\sqrt{2}$
Vert : Transformer par Thu-Morse de la suite en binaire de $\sqrt{2}$ qui donne après reconstruction le nombre 0,412495946200044

Annexe 4




Bleu : Suite de 0 et de 1 au hasard
Vert : Suite de 0 et de 1 au hasard
Orange : Suite de 0 et de 1 construite à partir de la suite verte en multipliant chaque terme de la suite par 3 modulo 2.