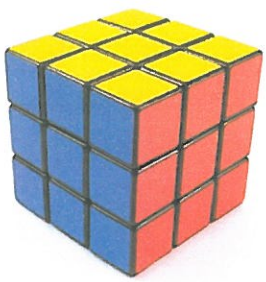
David ROUIMI - M2 Didactiques des Mathématiques

Actualité de la recherche en Mathématiques

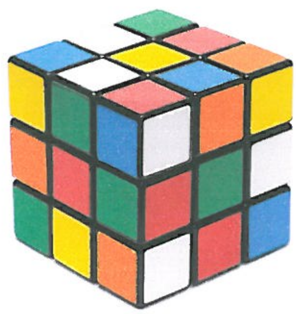
Propriétés mathématiques du Rubik's Cube

I. *Introduction*

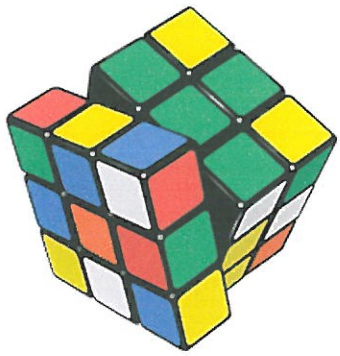
Le Rubik's Cube. Objet de toutes les convoitises dans les années 80, il a été inventé par le Hongrois Ernõ Rubik en 1974. S'il peut sembler tout simple, il s'agit véritablement d'un casse-tête géométrique. A priori composé simplement de six faces, chacune d'une couleur différente, il est possible de tout mélanger. Le but est donc simple : réussir à reformer le cube initial en manipulant l'objet.



Cube sous sa forme initiale



Cube mélangé



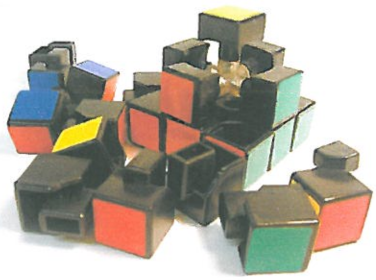
Cube se faisant manipuler

II. *Fonctionnement*

Avant d'attaquer les propriétés mathématiques de cet objet passionnant, il est d'abord important d'en expliquer le fonctionnement.

Un Rubik's Cube « officiel » est ainsi fait : les faces blanche et jaune sont en face, tout comme les faces bleue et verte et les faces rouge et orange. Il existe cependant des variantes.

Chaque face du Rubik's Cube est composé de 9 cubes miniatures, chacun pouvant tourner indépendamment des autres. Si on peut penser qu'il possède ainsi 27 cubes, il n'en est rien puisqu'au centre, il y a un mécanisme permettant de tout faire tourner. Lorsque l'on démonte le cube, on obtient ceci :



Il est alors aisé de constater que le cube est en fait composé de 26 petits cubes, chacun ayant SA place attitrée sur le Rubik's Cube.

Tout cube possédant 6 faces, 8 sommets et 12 arêtes, le Rubik's Cube se décompose ainsi :

- 6 cubes « face », ou cubes « centre », d'une seule couleur, ne se déplaçant pas sur le cube, et dont nous ne parlerons pas (nous verrons pourquoi plus loin),
- 8 cubes « sommet », ou cubes « coin », que nous appellerons par la suite CS, et ayant 3 couleurs,
- 12 cubes « arête », que nous appellerons par la suite CA, et ayant 2 couleurs.

Ainsi, il est bien certain qu'un CS ne peut se placer que sur un sommet et qu'un CA ne peut se placer que sur une arête.

Résoudre le Rubik's Cube n'est jamais dû au hasard. Il y a des méthodes, plus ou moins simples et plus ou moins rapides. La plus simple, mais la moins rapide, consiste à réaliser le cube étage par étage, en commençant par la face blanche avec sa « couronne », puis la seconde couronne, et enfin, après avoir retourné le cube, terminer par la face jaune. En allant vite, et avec un peu de chance, on peut espérer, avec cette méthode, terminer le cube en 45 secondes

Il existe aussi, par exemple, la méthode de Fridrich, beaucoup plus complexe, mais tellement plus rapide, qui permet de résoudre le cube avec un temps oscillant entre 7 et 20 secondes.

Mais tout ceci n'est pas le but de notre recherche. Nous allons tenter de montrer comment on peut construire un groupe autour du Rubik's Cube, avec les propriétés que cela comporte, de calculer (ou du moins de majorer) le nombre total de possibilités et enfin, d'expliciter quelques mouvements particuliers, ainsi que des combinaisons impossibles à réaliser par des mouvements « légaux », c'est-à-dire sans décoller les étiquettes de couleur ni démonter le cube et le remonter de manière fausse.

III. *Un groupe ? Quel groupe ?*

Un groupe intéressant à construire est celui des permutations induites par les mouvements qu'on applique.

Chaque face du cube peut être nommée ainsi : Avant, Postérieure, Droite, Gauche, Haut et Bas. Bien évidemment, selon la face que l'on a devant soi, la face Avant peut être n'importe laquelle.

Chaque face peut être pivotée d'un quart de tour, dans le sens horaire ou anti-horaire. On appellera mouvement élémentaire (ou générateur) une rotation de face de 90° dans le sens horaire. Chaque mouvement sera désigné par l'initiale de la face (par exemple A) et le mouvement inverse sera noté A^{-1}. Il est bien évidemment possible d'enchainer les mouvements élémentaires pour obtenir à nouveau un mouvement M.

Ainsi, l'ensemble des permutations induites par les mouvements muni de la loi de composition « enchainement », notée o, ou non notée du tout (on écrira aussi bien AB que A o B) constitue un groupe $\mathcal{G}$.

- la composée d'une permutation P_1 avec une autre permutation P_2 est encore une permutation.
- $(P_1 \circ P_2) \circ P_3 = P_1 \circ (P_2 \circ P_3) = P_1 \circ P_2 \circ P_3$
- il existe un élément neutre, noté Id, celui qui consiste à ne rien faire.
- Pour toute permutation P, il existe une permutation P^{-1} telle que $P \circ P^{-1} =$ Id. Il suffit pour cela de refaire chaque mouvement élémentaire dans le sens inverse et dans l'ordre contraire.

Il est assez clair que ce groupe n'est pas abélien. En effet, il suffit de constater qu'appliquer le mouvement AB ne laisse pas le Cube dans la même configuration. En fait, la seule possibilité pour que les mouvements commutent est d'enchainer la rotation de deux faces disjointes.

IV. *Calcul du nombre de configurations*

Il y a 8 CS. Donc il y a 8 places possibles pour le 1er, 7 pour le 2nd, 6 pour le 3ème, etc… Ainsi, il y a $8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1 = 8!$ possibilités de distribuer les CS.

Or, chaque CS a 3 orientations possibles. On obtient donc $3^8\times8!$ possibilités.

Si on fait le même raisonnement sur les CA, on arrive $2^{12}\times12!$ possibilités de placement des CA.

Lorsque l'on fait une rotation de face, le cube « centre » ne bouge pas. Ainsi, et en généralisant, il n'y a aucune action sur l'ensemble des cubes « centre », quelle que soit le mouvement effectué.

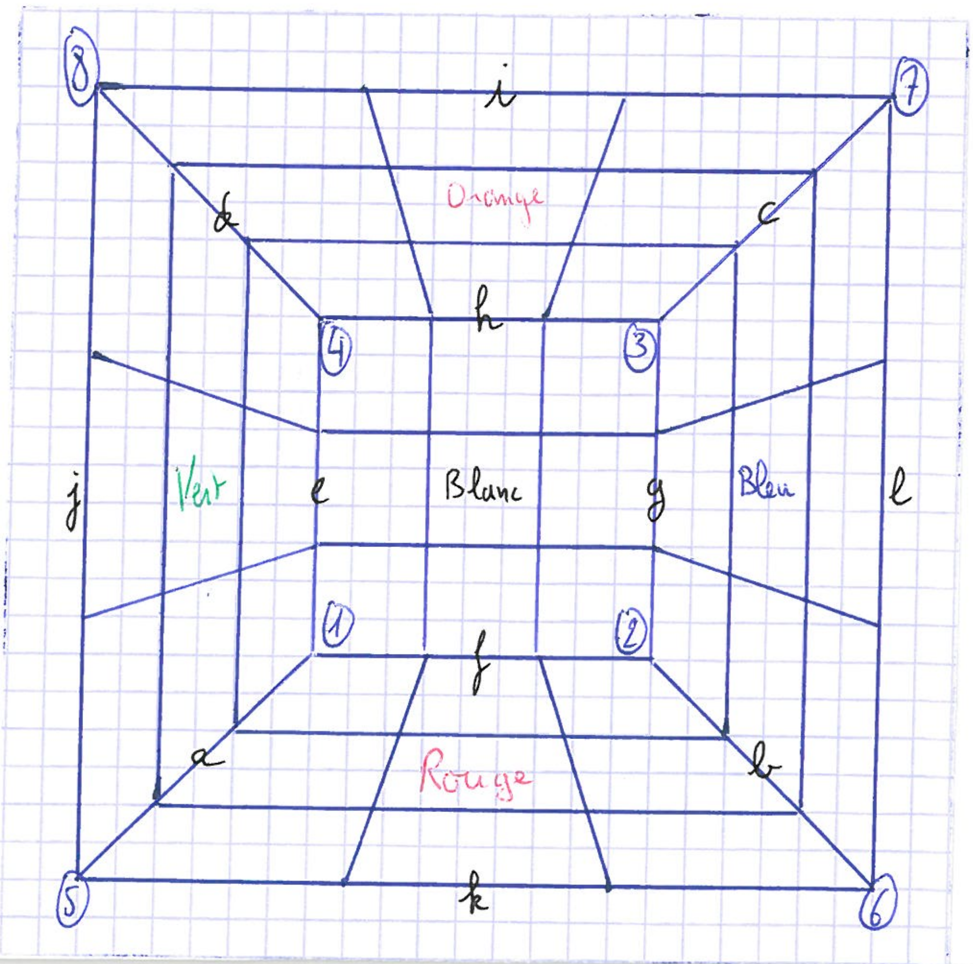
Ainsi, le nombre de configurations possibles est de $3^8 \times 8! \times 2^{12} \times 12!$ (c'est-à-dire de l'ordre de $5{,}19 \times 10^{20}$). Mais cette valeur n'est qu'une majoration du nombre de configurations. En effet, nous verrons plus loin que certaines ne sont pas valides, ce qui signifie qu'il n'est pas possible d'y parvenir sans démonter le Cube ou décoller les étiquettes de couleur… et l'objet n'a plus vraiment d'intérêt !

V. ***Mouvements particuliers***

Lorsque l'on tourne 4 fois de suite une même face d'un quart de tour dans le sens des aiguilles d'une montre, il est plus qu'évident que la face, et donc les CS et les CA, reviennent à leur place initiale et donc que la configuration est revenue à celle du départ. Si, par exemple, on considère la face avant, on peut écrire très simplement que $\boxed{\mathbf{A^4 = Id}}$. De même, $\boxed{\mathbf{A^k = A^{k[4]}}}$.

Nous allons maintenant traiter le cas d'un mouvement un peu plus complexe. Que se passe t-il lorsque l'on répète le mouvement AH plusieurs fois ? Autrement dit, lorsque l'on a le cube face à soi, que se passe t-il lorsque l'on tourne la face avant puis la face du haut d'un quart de tour dans le sens des aiguilles d'une montre plusieurs fois ?

Pour expliquer cela, nous avons besoin d'un dessin expliquant le fonctionnement et le déplacement des CS et des CA.



Nous notons 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 les 8 CS et a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l les 12 CA.

La face blanche est considérée comme étant au dessus, la bleue à droite, la verte à gauche, la rouge devant et la orange à l'arrière (face postérieure).

Considérons d'abord les CS

Par le mouvement A, le CS 1 vient en 2 puis, par le mouvement H retourne en 1, mal orienté. En 3 coups, le CS 1 revient orienté.

Les CS 7 et 8 ne bougent bien évidemment pas.

Les autres : 2 --> 6 --> 5 --> 4 --> 3 --> 2. On a ainsi un cycle de longueur 5. Attention, les CS sont à leur place mais très probablement mal orientés. Mais en 15 coups, les CS se retrouvent donc orientés.

Ainsi, on peut écrire que **$(AH)^{15}$ préserve tous les sommets.**

Intéressons nous ensuite aux CA

Les CA qui ne sont pas sur les faces A et H ne sont pas touchés : j et l, d et c, ainsi que i.

Les autres : a --> e --> h --> g --> f --> b --> k --> a. Nous avons donc un cycle de longueur 7. On constate de plus que les CA reviennent à leur place et sont orientés.

Ainsi, **$(AH)^{7k+p}$ a le même effet sur les CA que $(AH)^p$.**

Pour conclure, nous pouvons dire qu'il faut un multiple de 7 (CA) et de 15 (CS) pour remettre le cube en place. Or, PGCD(7 ; 15) = 1 et donc PPCM(7 ; 15) = $7 \times 15 = 105$.

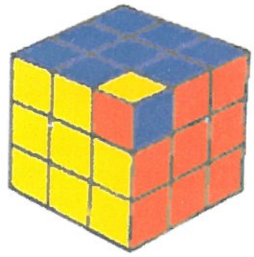
Il faut donc effectuer 105 fois le mouvement AH pour remettre le cube en place.

Conclusion : $\boxed{(AH)^{105} = id \text{ et } 105 \text{ est donc l'ordre de } (AH)}$

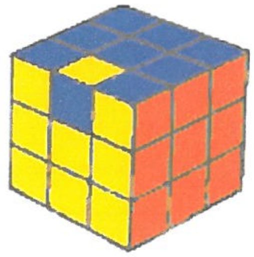
VI. *Combinaisons impossibles*

Si le nombre de combinaisons est très élevé, il n'est pas infini et il y a certaines configurations qu'il n'est pas possible de réaliser.

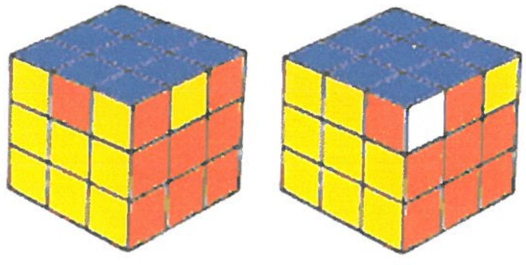
1. On ne peut pas faire pivoter sur lui-même un seul CS.



2. On ne peut pas faire pivoter sur eux-mêmes un nombre impair de CA.



3. On ne peut pas permuter deux CA ou deux CS sans rien changer d'autre.



Nous allons tâcher d'expliquer ici la seconde impossibilité, les autres se démontrant de façon plus ou moins analogue.

Intéressons nous aux facettes et non plus aux cubes en eux-mêmes. Chaque CA possède deux facettes, chaque CS en possédant trois.

L'action d'un générateur sur les CA est un cycle de longueur 4. Mais l'action d'un générateur sur les facettes d'un CA nous donne deux cycles disjoints de longueur 4. En effet, regardons l'effet d'une telle permutation : 4 CA seulement tournent et il faut 4 rotations pour revenir à l'état initial. Mais si on regarde les facettes, on constate que celles que l'on voit ont besoin de 4 quarts de tour, tout comme les facettes se trouvant sur la « couronne ».

On obtient donc une permutation paire dont la signature est donc égale à 1. Ceci est dû au fait qu'un cycle de longueur 4 a une signature égale à -1 et en utilisant la propriété qui dit que $\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$, on arrive bien à ce résultat. Et si l'on compose plusieurs permutations paires, on arrive toujours à ce résultat.

De plus, s'il nous était possible de permuter un seul CA, on aurait une transposition qui a pour signature -1.

Conclusion : il est impossible de permuter un seul CA… sous-entendu sans démonter le cube ou décoller les étiquettes de couleur bien sur.

Sous ces contraintes, nous pouvons affiner le nombre de configurations possibles. En effet, lors du calcul sur les CA, on obtenait $2^{12}\times 12!$. Mais puisqu'il est impossible de permuter un seul CA en laissant le reste invariant, l'orientation de 11 CA implique celle du 12$^{\text{ème}}$. Ainsi, il n'y a « que » $2^{11}\times 12!$ combinaisons possible pour les CA.

Un calcul analogue qui découle de ce que nous n'avons pas démontré sur les CS nous prouve que sur les CS, il n'y a « que » $3^7\times 8!$ combinaisons.

Dernière contrainte, qui découle de la 3$^{\text{ème}}$ impossibilité : lorsque tous les cubes sont bien positionnés sauf 2, l'emplacement de ces deux cubes est imposé et il y a donc deux fois moins de combinaisons possible.

Au final, le nombre de combinaisons possibles est donc $3^7\times 8!\times 2^{10}\times 12!$, soit la bagatelle de **43 252 003 274 489 856 000** (de l'ordre de $4{,}32\times 10^{19}$).

VII. *Nombre minimal de mouvements pour résoudre le Cube*

Un calcul qui semble simple mais qui est en fait assez complexe nous indique que pour résoudre le Cube, il est nécessaire de faire au minimum 19 mouvements. Ce calcul se trouve à l'adresse suivante :

http://www.lix.polytechnique.fr/~golden/research/Rubiks_Cube_research.pdf