Priscilla Ntie
UE 3.4 Actualités de la recherche en mathématiques
Travail pour le 15 mai 2013

Comment poser et résoudre un problème, POLYA

Titre original: How to solve it

« Regardez autour de vous lorsque vous trouvez votre premier champignon ou que vous faites votre première découverte : les champignons sont comme les découvertes, ils ne poussent jamais seuls. »
Page 202

Plan de ce mini-mémoire :

I. Synthèse de l'ouvrage.

Dans cet ouvrage, Polya s'adresse à la fois à des professeurs de mathématiques désireux d'aider leurs élèves à progresser, à des élèves souhaitant s'améliorer en mathématiques, mais aussi à toute personne s'intéressant à la résolution de problèmes, qu'ils soient mathématiques ou non.

Plan de l'ouvrage :

La Ie partie, intitulée « Dans la salle de classe », présente le but visé par le tableau, en explique les divisions et questions principales, et donne quelques exemples pratiques.
La IIe partie, intitulée « Résoudre », se présente sous la forme d'un dialogue entre un élève et son professeur, tous deux étant idéalisés.
La IIIe partie, la plus importante, est un « Petit dictionnaire d'heuristique ».
Enfin, la IVe partie présente quelques problèmes, conseils de résolution et solutions.

Le tableau : *(voir également page 32)*

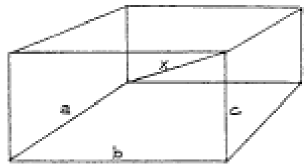
Pour résoudre un problème vous devez successivement :

I — Comprendre le problème	**COMPRENDRE LE PROBLÈME** • *Quelle est l'inconnue ? Quelles sont les données ? Quelle est la condition ?* • Est-il possible de satisfaire à la condition ? La condition est-elle suffisante pour déterminer l'inconnue ? Est-elle insuffisante ? Redondante ? Contradictoire ? • Dessinez une figure. Introduisez la notation appropriée. • Distinguez les diverses parties de la condition. Pouvez-vous les formuler ?
II — Concevoir un plan Trouver le rapport entre les données et l'inconnue. Vous pouvez être obligé de considérer des problèmes auxiliaires si vous ne pouvez trouver un rapport immédiat. Vous devez obtenir finalement un plan de la solution.	**CONCEVOIR UN PLAN** • L'avez-vous déjà rencontré ? Ou bien avez-vous rencontré le même problème sous une forme légèrement différente ? • *Connaissez-vous un problème qui s'y rattache ?* Connaissez-vous un théorème qui puisse être utile ? • *Regardez bien l'inconnue* et essayez de penser à un problème qui vous soit familier et qui ait la même inconnue ou une inconnue similaire. • *Voici un problème qui se rattache au vôtre et que vous avez déjà résolu. Pourriez-vous vous en servir ?* Pourriez-vous vous servir de son résultat ? Pourriez-vous vous servir de sa méthode ? Vous faudrait-il introduire un élément auxiliaire quelconque pour pouvoir vous en servir ? • Pourriez-vous énoncer le problème différemment ? Pourriez-vous l'énoncer sous une autre forme encore ? Reportez-vous aux définitions. • Si vous ne pouvez résoudre le problème qui vous est proposé, essayez de résoudre d'abord un problème qui s'y rattache. Pourriez-vous imaginer un problème qui s'y rattache et qui soit plus accessible ? Un problème plus général ? Un problème plus particulier ? Un problème analogue ? Pourriez-vous résoudre une partie du problème ? Ne gardez qu'une partie de la condition, négligez l'autre partie ; dans quelle mesure l'inconnue est-elle alors déterminée, comment peut-elle varier ? Pourriez-vous tirer des données un élément utile ? Pourriez-vous penser à d'autres données qui pourraient vous permettre de déterminer l'inconnue ? Pourriez-vous changer l'inconnue, ou les données, ou toutes deux s'il est nécessaire, de façon que la nouvelle inconnue et les nouvelles données soient plus rapprochées les unes des autres ? • Vous êtes-vous servi de toutes les données ? Vous êtes-vous servi de la condition tout entière ? Avez-vous tenu compte de toutes les notions essentielles que comportait le problème ?
III — Mettre le plan à exécution	**METTRE LE PLAN A EXÉCUTION** • En mettant votre plan à exécution, vérifiez-en chaque détail l'un après l'autre. Pouvez-vous voir clairement si ce détail est correct ? Pouvez-vous démontrer qu'il est correct ?
IV — Examiner la solution obtenue	**REVENIR SUR LA SOLUTION** • Pouvez-vous vérifier le résultat ? Pouvez-vous vérifier le raisonnement ? • Pouvez-vous obtenir le résultat différemment ? Pouvez-vous le voir d'un coup d'œil ? • Pouvez-vous vous servir du résultat ou de la méthode pour quelque autre problème ?

1re partie : Dans la salle de classe : Les 4 phases de travail.

1) Comprendre le problème.

L'élève doit comprendre le problème et désirer le résoudre. L'énoncé verbal doit être compris : l'élève doit être capable de le répéter, de le reformuler. L'élève doit pouvoir dégager sans peine l'inconnue, les données et la condition. Si l'énoncé du problème comporte une figure, l'élève doit la tracer et y noter l'inconnue et les données, en utilisant si besoin les notations appropriées.



Enoncé du premier problème : *Trouver la diagonale d'un parallélépipède rectangle, connaissant la longueur, la largeur et la hauteur*.

Polya suggère de rendre le problème concret pour le rendre plus intéressant (par exemple : déterminer d'une manière indirecte la diagonale de la salle de classe).
Le professeur pose une série de questions génériques à ses élèves pour amorcer la résolution de ce problème : Quelle est l'inconnue ? Quelles sont les données ? Etc. (voir tableau)

2) La conception d'un plan.

C'est la partie la plus délicate lors de la résolution d'un problème. Le but du professeur doit être d'amener l'élève à trouver les bonnes idées en l'aidant sans s'imposer à lui.
Ces « bonnes idées » s'appuient : sur l'expérience passée (problèmes déjà résolus) et sur les connaissances précédemment acquises (théorèmes démontrés).
Il peut exister une quantité de problèmes se rattachant au problème étudié, d'où l'importance de se concentrer sur l'inconnue : Essayez de penser à un problème qui vous soit familier et qui comporte la même inconnue ou une inconnue similaire. Pouvez-vous vous en servir ?
Si cela ne marche pas, on peut explorer les différents aspects du problème. On utilise pour cela la généralisation, la particularisation, l'analogie ; on peut aussi négliger une partie de la condition.
Après s'être éloigné de l'énoncé originel du problème, il est nécessaire d'y revenir pour vérifier qu'on a effectivement trouvé la solution.

3) Exécution du plan.

La mise sur pied d'un plan présuppose des connaissances acquises, de bonnes habitudes de pensée, de la concentration et de la chance. Mettre le plan à exécution demande surtout de la patience.
Le professeur doit insister pour que l'élève vérifie chaque détail de son plan, soit par intuition, soit par une démonstration formelle.

4) Revenir sur la solution.

« Un bon professeur doit comprendre et faire comprendre à ses élèves que nul problème n'est jamais complètement terminé. Il reste toujours quelque chose à faire ; par un travail convenable et une certaine concentration, nous pouvons améliorer non seulement n'importe quelle solution, mais aussi, certainement, notre compréhension de la solution. » (Page 19)

Pouvez-vous vérifier le résultat ? La formule littérale obtenue a un grand avantage sur un résultat purement numérique : elle peut être soumise à plusieurs vérifications.
Pouvez-vous vérifier le raisonnement ? Il peut être utile, dans des cas difficiles et importants, de reprendre tout le raisonnement pas à pas. En général, il suffit de revenir sur les points délicats.

Pouvez-vous vous servir du résultat ou de la méthode pour quelque autre problème ?
Interprétation concrète proposée :
« On doit dresser un mât de huit mètres de haut au centre du toit plat et rectangulaire d'un bâtiment de 21 mètres de long et 16 mètres de large. Il faut pour soutenir le mât quatre câbles d'égale longueur. Les câbles doivent partir d'un même point, situé à 2 mètres du sommet du mât, et aboutir aux quatre coins du toit. Quelle est la longueur de chacun de ces câbles ? »

La méthode d'interrogation du professeur.
Les questions utilisées par le professeur doivent être simples, naturelles et générales (pour pouvoir s'appliquer à tout type de problème et permettre aux élèves de développer des aptitudes à la résolution de problème et pas une technique particulière).
La liste doit en être courte pour qu'elles soient facilement assimilées par les élèves et deviennent une habitude de l'esprit.

Exemple de mauvaise question : Pourriez-vous appliquer le théorème de Pythagore ?
1. N'apportera aucune aide à un élève qui est encore loin de la solution.
2. Elle livre le secret tout entier à l'élève qui n'a plus grand 'chose à faire.
3. Elle n'a rien d'instructif : l'élève n'en retirera rien pour les problèmes ultérieurs.
4. L'élève peut difficilement comprendre pourquoi le professeur a eu l'idée de faire une telle suggestion.

2e partie : RESOUDRE (DIALOGUE)
Reformulation de ce qui a été dit précédemment.
1. Faire connaissance (avec le problème).
2. Travailler pour mieux comprendre.
Les points principaux d'un **problème à démontrer** sont l'hypothèse et la conclusion. Dans un **problème à résoudre**, ce sont l'inconnue, les données et les conditions.
3. Rechercher l'idée heureuse.
Toute idée doit être examinée. Elle peut montrer l'ensemble du raisonnement ou une de ses parties. Si elle semble fructueuse, il faut lui consacrer plus de temps et voir jusqu'où elle mène. Elle peut mener tout droit à la solution ou au contraire conduire à faire fausse route.
« Pourtant, vous devez vous réjouir de toute idée nouvelle, même si elle est de peu d'importance ou vague, car elle pourra amener à son tour une idée supplémentaire qui y ajoutera quelque précision si elle était vague, ou permettra de la corriger si elle n'était pas très heureuse. Même si, pendant un certain temps, vous n'avez pas de nouvelle idée vraiment bonne, vous devez vous estimer heureux si votre conception du problème devient plus complète et plus cohérente, plus homogène ou plus équilibrée.» (Pages 40-41)
4. Mettre le plan à exécution.
« Acquérez la conviction de l'exactitude de chaque étape par un **raisonnement formel** ou par une **intuition**, ou des deux façons si possible. » (Page 41)
5. Revenir sur la solution.
« Vous pouvez trouver une solution différente et meilleure, découvrir des faits nouveaux et intéressants. En tous cas, si vous prenez l'habitude de revoir vos solutions et de les examiner ainsi attentivement, vous acquerrez des connaissances bien ordonnées et prêtes à être utilisées, et vous développerez votre aptitude à résoudre les problèmes. » (Page 41)

IIe partie : Petit dictionnaire d'heuristique.

Mathématiciens présents dans ce dictionnaire :

Bolzano : Logicien et mathématicien du début du 19e siècle ayant consacré une grande partie de son important ouvrage de logique à la question de l'heuristique.

Descartes : Philosophe et mathématicien du 17e siècle. Il projeta de donner une méthode universelle de solution des problèmes mais n'acheva pas son ouvrage *Regulae ad Directionem Ingenii* (dont les fragments qui nous sont parvenus contiennent des matériaux plus intéressants pour la résolution de problèmes que le *Discours de la méthode*).

Leibnitz : (fin du 17e – début du 18e siècle). Philosophe et mathématicien qui projeta d'écrire un *Art de l'Invention*, mais ne mit jamais ce projet à exécution. Selon lui, les sources de l'invention sont plus intéressantes que les inventions elles-mêmes.

Pappus : Célèbre mathématicien grec (environ 300 après Jésus-Christ) ayant traité de l'heuristique. (Article détaillé plus loin)

Synthèse des principaux articles de ce dictionnaire :

L'analogie est une sorte de similarité qui imprègne toute notre façon de penser. Pour résoudre un problème, nous pouvons souvent utiliser **la méthode** et/ou **le résultat** d'un problème analogue plus simple. Elle permet parfois de prévoir le résultat ou certaines de ses caractéristiques.

Décomposer et recomposer le problème

1. **« Problèmes à résoudre ».**

Il est nécessaire de d'abord comprendre le problème comme un tout afin de ne pas se perdre dans les détails. On entre ensuite dans les détails : Quelles est l'inconnue ? Quelles sont les données ? Quelle est la condition ?

Après avoir décomposé le problème, essayer d'en recomposer les éléments d'une façon différente. Il est possible de : soit garder l'inconnue et changer les autres éléments ; soit garder les données et changer les autres éléments ; soit changer à la fois l'inconnue et les données.

En gardant les données, on peut essayer d'introduire une nouvelle inconnue, plus accessible que l'originale, et qui doit pouvoir aider à déterminer l'inconnue du problème original.

En changeant à la fois l'inconnue et les données, il y a risque d'oublier complètement le problème original. Et pourtant, on peut être contraint d'avoir à recourir à ce procédé si des changements moins radicaux ne nous ont rien apporté d'utile.

Une façon intéressante de changer à la fois l'inconnue et les données consiste à remplacer l'inconnue par une des données et vice versa.

La solution d'un « problème à résoudre » peut dépendre de celle d'un « problème à démontrer ».

2. **« Problèmes à démontrer ».** Une fois le problème compris comme un tout, il s'agit d'entrer dans le détail : quelles sont l'hypothèse et la conclusion du théorème à démontrer ou à réfuter ?

Il existe trois possibilités de recomposition :

*garder la conclusion et changer l'hypothèse.

Considérez la conclusion et essayez de penser à un théorème qui vous soit familier et dont la conclusion soit identique ou similaire.

Pouvez-vous penser à une autre hypothèse dont vous pourriez tirer facilement la conclusion ?

Ne gardez qu'une partie de l'hypothèse en négligeant l'autre ; la conclusion est-elle valable ?
*garder l'hypothèse et changer la conclusion.
Pouvez-vous tirer un renseignement utile de l'hypothèse ?
*changer à la fois l'hypothèse et la conclusion.

Définition. Définir un terme, c'est donner sa signification en termes différents supposés courants. En mathématiques, certains **termes** sont **premiers** et on ne les définit pas. Les **termes dérivés** sont définis de façon formelle en employant des termes premiers ou des termes dérivés précédemment définis. **Le processus du retour aux définitions permet d'éliminer les termes techniques et de modifier le problème.**
Deux types de connaissances sont nécessaires à la résolution d'un problème ayant trait à un terme technique : **définitions et théorèmes**. En outre, il existe souvent **plusieurs définitions** d'une notion dérivée. On ne peut pas savoir a priori s'il vaudra mieux employer une définition (et laquelle) ou un théorème, mais il certain qu'il nous faudra utiliser l'un ou l'autre.

Détermination, espoir, succès.
« La solution des problèmes est une école de la volonté. En résolvant des problèmes qui lui paraissent difficiles, l'élève apprend à persévérer malgré l'insuccès, à apprécier les moindres progrès, à attendre l'idée essentielle, à faire appel à toute sa puissance de concentration. **S'il n'a pas trouvé, à l'école, l'occasion de se familiariser avec les émotions diverses de l'effort en vue de la solution, son éducation mathématique a failli à l'essentiel de son objet**. » (Page 72)

Diagnostic. Les principales lacunes des élèves consistent en :
►un manque d'une **compréhension** complète du problème, dû à un manque de concentration.
►défaut de **conception du plan** : certains élèves se lancent dans des calculs et constructions sans plan, tandis que d'autres attendent que l'idée leur vienne sans rien faire pour en accélérer la venue.
►Lors de la **mise à exécution du plan**, le défaut le plus fréquent est la négligence, le manque de patience dans la vérification des détails principaux.
►Pas de **vérification** du résultat obtenu, même si celui-ci est totalement invraisemblable.
Le professeur ayant diagnostiqué l'un de ces défauts chez son élève pourra l'aider à progresser dans ce domaine en insistant sur certaines questions du tableau.

Eléments auxiliaires. Il peut y avoir diverses raisons d'introduire des éléments auxiliaires :
►Si l'on souhaite utiliser un problème qui se rattache au nôtre et que l'on a déjà résolu, nous devrons souvent nous demander : « Faut-il, pour pouvoir s'en servir, introduire un élément auxiliaire quelconque ? » (Par exemple, un triangle)
►Recourir aux définitions amène à introduire des éléments auxiliaires, comme par exemple une figure géométrique.
L'introduction d'éléments auxiliaires ne peut en aucun cas être gratuite. C'est une étape fondamentale du raisonnement qu'il convient d'expliquer à l'aide de remarques pertinentes ou grâce à des questions ou à des suggestions bien choisies.

Figures. Une figure peut être une aide considérable dans la résolution de problèmes géométriques et non géométriques. Celle-ci peut être imaginée ou représentée sur le papier. Il est avantageux de la tracer si nous avons à examiner l'un après l'autre plusieurs détails différents.

« La méthode qui consiste à commencer l'étude d'un problème de géométrie en traçant une figure dans laquelle, par hypothèse, la condition est satisfaite, remonte aux géomètres grecs. » (Page 88)
Il faut alors veiller à ne pas confondre la possibilité et la certitude.

►**Convient-il de tracer des figures d'une manière exacte ou approximative, avec ou sans instruments ?**

*Les débutants doivent construire un grand nombre de figures aussi exactement que possible de façon à acquérir une bonne base expérimentale.
*Une figure exacte peut suggérer un théorème géométrique.
Toutefois, pour ce qui est du raisonnement proprement dit, il suffit en général de tracer soigneusement une figure à main levée.
« **La figure est une aide, mais ne constitue en rien la base de nos conclusions ; ce sont les rapports logiques qui en forment la base réelle**. » (Page 89)

► Les éléments doivent être assemblés selon les rapports requis, mais peu importe l'ordre dans lequel ils sont construits.
► La figure ne doit suggérer aucune particularité non requises par le problème.
►On peut tracer les lignes d'un trait léger ou épais, continu ou en pointillé, ou encore employer des couleurs différentes.
►Pour illustrer les problèmes de géométrie dans l'espace, on peut utiliser des objets usuels, tels une boîte, une brique, la salle de classe, un crayon, un abat-jour, etc. …

La Généralisation consiste à passer de l'étude d'un objet (ou d'un groupe limité d'objets) à celui d'un groupe d'objets parmi lequel figure le (ou les) premier(s).
Trois types de généralisation sont illustrés à l'aide d'exemples :
►le raisonnement par induction ;
►essayer de résoudre un problème plus général que le problème donné, en faisant ressortir une propriété essentielle d'un des éléments du problème ;
►passer d'un problème numérique à un problème littéral permet de varier les données et de vérifier notre résultat de plusieurs façons.

Heuristique moderne.

L'heuristique est une science assez mal définie que l'on rattachait tantôt à la logique, tantôt à la psychologie. Elle avait pour objet **l'étude des règles et des méthodes de la découverte et de l'invention.**
« L'heuristique moderne s'efforce de comprendre la méthode qui conduit à la solution des problèmes, en particulier *les opérations mentales qui s'avèrent typiquement utiles* à l'application de cette méthode. » (Page 93)
« Une telle étude a des objectifs pratiques ; une meilleure compréhension des opérations mentales typiquement utiles dans la solution d'un problème peut en effet influer favorablement sur les méthodes d'enseignement, notamment en ce qui concerne les mathématiques. » (Page 94)
Le tableau constitue une énumération de ces opérations mentales. Ce tableau est particulièrement adapté à la résolution des « problèmes à résoudre ». Il conviendra de modifier certaines de ses questions ou suggestions pour pouvoir l'appliquer également aux « problèmes à démontrer ».
Les problèmes de toute sorte, y compris les problèmes pratiques et les énigmes, relèvent du domaine de l'heuristique.

Indices du progrès.
Le tableau contient les opérations mentales les plus utiles pour résoudre des problèmes. Si l'une de ces opérations réussit, ce succès doit être considéré comme un **indice de progrès nettement significatif**. Nous pouvons nous fier à l'inspiration et aux sentiments (**indices moins évidents**) qui nous guident mais en gardant les yeux ouverts, en conservant une part de doute.

« Les indices peuvent guides nos actes. Leur absence peut nous avertir que nous sommes dans une impasse et nous épargner une perte de temps et une vaine fatigue tandis que leur présence nous permettra de porter nos efforts sur le point essentiel. » (Page 105)

Syllogisme heuristique :
Prémisses : Quand nous approchons d'une terre, nous voyons souvent des oiseaux.
Or, nous voyons des oiseaux.
Conclusion : Donc, il devient plus croyable que nous approchions d'une terre.
Le rôle essentiel de ce type de raisonnement est de permettre une **variation du degré de confiance**.

Le raisonnement *plausible* est important mais ne constitue pas une démonstration. **Il n'offre pas la certitude d'une démonstration rigoureuse, mais est utile à l'acquisition de connaissances nouvelles.**

Syllogisme démonstratif :	Si A donc B B faux	Syllogisme heuristique :	Si A donc B B vrai
Conclusion :	A faux	Conclusion :	A plus croyable

Induction et induction mathématique.
« L'induction essaie de découvrir derrière l'observation la régularité et la cohérence ; ses instruments les plus visibles sont la généralisation, la particularisation et l'analogie. […] **Les mathématiques présentées avec rigueur sont une science systématique, déductive, mais les mathématiques en gestation sont une science expérimentale, inductive**. » (Page 112)

L' « induction mathématique » (démonstration par récurrence) repose sur les points suivants :
►L'affirmation à démontrer doit être donnée par avance, sous une forme précise.
►Elle doit dépendre d'un nombre entier n.
►Elle doit être suffisamment « explicite » pour nous permettre de vérifier qu'elle reste vraie lorsque nous passons d'un nombre entier n au nombre entier suivant n+1.
►Une fois ce point acquis, il suffit de savoir que le postulat est vrai pour n=1.

Le lecteur intelligent d'un ouvrage de mathématiques et l'auditeur intelligent qui assiste à un cours de mathématiques ont une double exigence :►constater que l'étape du raisonnement est correcte ;
►comprendre le but de cette étape.
« Un raisonnement présenté d'une façon correcte, dans un ouvrage ou sur un tableau, pourra cependant n'être ni intelligible, ni instructif s'il ne fait pas comprendre le but des étapes successives qui y ont conduit, si le lecteur – ou l'auditeur – n'arrive pas à déterminer la façon dont ce raisonnement a été obtenu, si la présentation de la solution ne lui suggère aucun moyen de découvrir par lui-même un raisonnement du même type. » (Page 117)

Mettre le plan à exécution.
Lors de la conception du plan, nous sommes libres d'user du raisonnement heuristique. En revanche, lors de son exécution, il faut procéder avec ordre, vérifier chaque détail avec soin et n'accepter que des preuves rigoureuses.
L'ordre dans lequel nous examinons les détails d'un problème et celui dans lequel nous les avons conçus peuvent tous deux être très différents de l'ordre d'exposition définitif de la solution.
« **L'exposé euclidien qui consiste à aller rigoureusement des données à l'inconnue, de l'hypothèse à la conclusion, est parfait pour permettre la vérification d'un raisonnement dans le détail ; mais il est loin de l'être lorsqu'on cherche à en faire comprendre les grandes lignes.** » (Il suit rigoureusement l'ordre de la synthèse) (Page 120)
Il n'est pas recommandé au professeur de présenter la plupart de ses démonstrations à la façon purement euclidienne. Il pourra procéder ainsi après une discussion où les élèves, sous sa direction, arriveraient à découvrir d'eux-mêmes l'idée-clé de la solution.

La Mise en équation ressemble à une **traduction**, ce qui peut permettre d'éclairer la nature de certaines des difficultés rencontrées par les professeurs et par les élèves.
« Mettre en équation, c'est exprimer à l'aide de symboles mathématiques une condition formulée en mots, c'est traduire le langage ordinaire en formules mathématiques. […] Il faut, d'une part, avoir compris à fond la condition, d'autre part, être familiarisé avec les formes de l'expression mathématique. » (Page 122)

Notation. L'utilisation de signes (figures et symboles) semble indispensable au raisonnement.
« En tout cas, l'emploi des symboles mathématiques est analogue à celui des mots. La notation mathématique apparaît comme une sorte de langage, une « langue bien faite », parfaitement adaptée à son but, concise et précise, avec des règles qui, à l'inverse de celles de la grammaire, ne souffrent pas d'exception. » (Page 126)
« Une bonne notation doit être claire, concise et facile à retenir. […] L'ordre des signes et leurs rapports entre eux doivent suggérer l'ordre et les rapports des objets auxquels ils correspondent. » (Page 126)
Exemples :
*emploi de lettres rapprochées dans l'alphabet (a, b, c pour des quantités données ou des constantes ; x, y, z, pour des quantités inconnues ou des variables)
*distinction d'objets de catégories différentes par l'emploi d'alphabets différents (A, B, C pour des points, a, b, c pour des lignes, α, β, γ pour des angles).
*certains symboles ont revêtu un sens traditionnel profondément enraciné (e, i, π). Il vaut mieux n'employer ces symboles que dans leur sens traditionnel pour ne pas risquer d'être induit en erreur.
« Une notation se présente toujours sous un jour arbitraire et artificiel ; et c'est une lourde tâche pour la mémoire que d'en apprendre un nouveau système. Un élève intelligent peut s'y refuser s'il n'en saisit pas la raison. L'aversion qu'il éprouve à l'égard de l'algèbre est justifiée si on ne lui a pas fourni des occasions fréquentes de constater par expérience l'aide évidente que l*_e langage des symboles mathématiques peut apporter à l'esprit**_**. L'aider à faire cette expérience, c'est pour le professeur un devoir important, nous dirons même essentiel, sinon toujours facile. »** (Pages 130-131)

Pappus. Célèbre mathématicien grec (environ 300 après Jésus-Christ) ayant traité de l'heuristique.

Polya adapte librement le texte de Pappus dans lequel il décrit le processus d'analyse et de synthèse.
« Dans **l'analyse**, partant de ce qui est demandé, nous le considérons comme admis, nous en tirons les conséquences, puis les conséquences de celles-ci, jusqu'à atteindre un point que nous puissions utiliser comme point de départ pour une synthèse. Car dans l'analyse, nous admettons que ce qu'on nous demande de faire est déjà fait, ce qu'on cherche, déjà trouvé, ce qu'il faut démontrer, exact. »
« Dans **la synthèse** au contraire, renversant le processus, nous partons du point atteint en dernier lieu dans l'analyse, de l'élément déjà connu ou admis comme vrai. Nous en déduisons ce qui, dans l'analyse, le précédait, et continuons ainsi jusqu'à ce que, revenant sur nos pas, nous arrivions finalement à ce qui nous était demandé. » (Pages 131-132)

« Les mêmes objets font partie de l'analyse et de la synthèse ; faisant travailler l'esprit de l'homme dans le premier cas, ses muscles dans le second ; l'analyse consiste en pensées, la synthèse en actes. Il y a pourtant entre elles une autre différence ; c'est que l'ordre est inversé. […] **L'analyse est l'invention, la conception du plan dont la synthèse est l'exécution.** » (Page 134)

Polya a ajouté « à condition que toutes nos dérivations soient réversibles » dans la paraphrase, condition qui ne se trouvait pas dans l'original et dont l'absence a été remarquée et critiquée dans les temps modernes.

Ce type de raisonnement par analyse-synthèse peut s'appliquer à tout problème (mathématique ou non-mathématique), et pas seulement aux problèmes géométriques.

La Particularisation est souvent utile pour résoudre un problème. Elle consiste à considérer un seul objet (ou un sous-ensemble d'objets) dans un ensemble d'objets donné.
►L'étude de **cas particuliers** peut permettre de démontrer qu'un théorème est faux (en exhibant un contre-exemple).
« Si l'expérience montre que le cas ne cadre pas avec la proposition générale, celle-ci se trouve réfutée du coup et notre tâche est terminée. Si au contraire l'objet examiné confirme la proposition, il est néanmoins possible que notre examen n'ait pas été inutile. Peut-être en tirerons-nous l'impression qu'après tout la proposition est vraie, et peut-être cela nous donnera-t-il une idée de la direction dans laquelle nous devons en chercher la preuve.» (Page 138)
►L'introduction d'un **problème auxiliaire** en considérant un cas particulier (cas extrême) du problème initial peut permettre de résoudre celui-ci.
►Deux autres emplois de la particularisation :
*vérifier la solution ;
*donner aux éléments mathématiques abstraits d'un problème une interprétation concrète.

Pourquoi des preuves ?
►« Si on laisse ignorer à un élève tel ou tel fait géométrique particulier, peu importe au fond, car il y a peu de chances pour qu'il ait plus tard à s'en servir ; mais si l'on néglige de lui enseigner les démonstrations géométriques, il ignorera les exemples les meilleurs et les plus simples de la **preuve exacte**, et perdra la plus belle occasion de sa vie d'acquérir la notion de ce qu'est un raisonnement rigoureux. Faute de cette notion, il lui manquera toujours un point de comparaison pour juger de la valeur des « preuves » que lui proposera la vie moderne. » (Page 145)

►La principale réussite d'Euclide est que la géométrie présentée dans ses *Eléments* est un **système logique** dans lequel les axiomes, définitions et propositions sont disposés dans un ordre parfait. Ce système repose sur des **démonstrations**. Chaque proposition s'y trouve placée d'une façon telle qu'elle résulte des axiomes, définitions et propositions précédents. Si l'éducation vise à donner à l'élève la notion de système logique, elle doit réserver une place aux démonstrations géométriques.

►Les démonstrations peuvent également être utiles en tant que procédé mnémotechnique. En effet, les faits reliés entre eux sont plus intéressants et plus faciles à retenir que les faits isolés.

► Si l'on exclut d'un cours de mathématiques toutes les formes de raisonnement, ce cours se transformera en une sorte d'**inventaire incohérent** non susceptible de fournir le moindre renseignement assimilable par les élèves.

► La **preuve incomplète** permet de résoudre le dilemme entre la démonstration trop longue et le livre de cuisine. Il peut s'agir de démontrer la partie facile d'une proposition en laissant de côté celle qui est ardue, ou encore d'utiliser une analogie pour donner l'idée de la démonstration.

Pouvez-vous vérifier le résultat ? Pouvez-vous vérifier le raisonnement ?

On peut faire appel à son bon sens pour vérifier les résultats numériques des problèmes mathématiques. Il peut être intéressant de généraliser un problème numérique en problème littéral qui permet des vérifications plus nombreuses et plus intéressantes : particularisation, examen des dimensions, variation des données.

Pour vérifier le raisonnement, il est possible de changer l'ordre des étapes ou la façon dont on les a groupées. On peut aussi relever les points faibles de notre raisonnement et les examiner en priorité.

Pouvez-vous vous servir du résultat ?

Nous ne devons jamais manquer de chercher à résoudre un nouveau problème à chaque fois que nous avons réussi à en résoudre un. On peut utiliser pour cela : la généralisation, la particularisation, l'analogie, la décomposition et la recomposition. On peut également :

►échanger les rôles joués par les données et l'inconnue.

►considérer comme variables certains éléments du problème proposé.

« L'expérience en mathématiques d'un élève sera toujours incomplète s'il n'a jamais eu l'occasion de résoudre un problème *qu'il a lui-même inventé* ». (Page 159)

La Preuve par l'absurde et la preuve indirecte sont des méthodes différentes mais apparentées.

« La *preuve par l'absurde* démontre qu'une affirmation est fausse en en tirant une absurdité manifeste. […] La *preuve indirecte* établit l'exactitude d'une affirmation en démontrant que son contraire est faux. » (Page 160)

Le raisonnement par l'absurde peut nous conduire soit à trouver l'inconnue qui satisfait à la condition, soit à montrer que la condition est impossible à satisfaire. Dans les deux cas, en effectuant une analyse, on commencera par examiner la situation hypothétique dans laquelle la condition est remplie, et c'est seulement à la fin que nous saurons quel espoir était trompeur.

Objections à ces deux types de démonstrations :

► Il semble difficile de retenir quelque chose de vrai en partant d'une preuve par l'absurde.

► Nous devons constamment fixer notre attention sur une hypothèse fausse que nous devons oublier ensuite, et non sur le théorème exact que nous devrions retenir.

La preuve par l'absurde est un outil de recherche très utile, mais ce n'est pas un moyen vraiment heureux d'exposer une solution. Il n'est généralement pas très difficile de transformer une preuve indirecte en preuve directe ou de présenter une preuve par l'absurde sous une forme plus agréable.

Problème auxiliaire.

« C'est un problème qui n'est pas travaillé pour lui-même, mais dont l'étude doit permettre – du moins on l'espère – de résoudre un autre problème, le problème primitif. » (Page 167)

Avantages à l'utilisation d'un problème auxiliaire : nous pouvons nous servir de son résultat et/ou nous pouvons nous servir de la méthode.

Risques liés à l'utilisation d'un problème auxiliaire : le temps et les efforts risquent d'être dépensés en pure perte si le problème auxiliaire n'a pas été judicieusement choisi.

Nous pouvons découvrir un problème auxiliaire utile : en regardant bien l'inconnue ; grâce à une variation du problème.

Deux problèmes sont dits **équivalents** lorsque la solution de l'un entraîne la solution de l'autre. Dans ce cas, le passage du problème primitif au problème auxiliaire s'appelle réduction *réversible*, ou *bilatérale*, ou encore *équivalente*. Si l'on passe d'un problème proposé à un problème auxiliaire plus ou moins ambitieux, on dit que la réduction est *unilatérale*. Une telle réduction est plus risquée en ce que nous pouvons perdre des solutions ou au contraire admettre des solutions impropres, mais elle peut s'avérer fructueuses.

Problèmes à résoudre, problèmes à démontrer.

« Le but d'un « problème à résoudre » consiste à découvrir un certain objet, l'inconnue du problème. […] Le but d'un « problème à démontrer » est de montrer de manière concluante l'exactitude ou la fausseté d'une affirmation clairement énoncée. » (Page 173)

Les questions et les suggestions du tableau peuvent être adaptées aux « problèmes à démontrer » :

Quelle est l'hypothèse ? Quelle est la conclusion ?

Distinguez les diverses parties de l'hypothèse.

Trouvez le lien entre l'hypothèse et la conclusion.

Regardez bien la conclusion ! Essayez de penser à un théorème qui vous soit familier et qui ait la même conclusion ou une conclusion similaire.

Ne gardez qu'une partie de l'hypothèse, négligez l'autre partie ; la conclusion est-elle toujours valable ? Pourriez-vous tirer de l'hypothèse un élément utile ? Pourriez-vous penser à une autre hypothèse dont vous pourriez tirer aisément la conclusion ? Pourriez-vous changer l'hypothèse ou la conclusion ou les deux si c'est nécessaire, de façon que la nouvelle hypothèse et la nouvelle conclusion soient plus rapprochées l'une de l'autre ?

Vous êtes-vous servi de l'hypothèse tout entière ?

Les Problèmes pratiques sont différents des problèmes mathématiques par bien des aspects. Cependant, les raisonnements, les méthodes principales qui permettent de les résoudre sont essentiellement les mêmes. Dans un problème pratique :

►les inconnues, les données et les conditions sont plus complexes et moins nettement définies ;

►les connaissances nécessaires et les concepts employés sont plus complexes et moins nettement définis.

Les questions à se poser seront modifiées par exemple comme suit :

Vous êtes-vous servi de toutes les données *qui peuvent contribuer de manière appréciable à la découverte de la solution* ? Vous êtes-vous servi de toutes les conditions *qui peuvent influer de manière appréciable sur la solution* ?

« Pour poser et résoudre les problèmes mathématiques dérivés de problèmes pratiques, nous devons en général nous borner à une *approximation* par suite de l'obligation où nous sommes de négliger certaines données et conditions mineures du problème pratique ; il y a donc lieu de tolérer une légère imprécision dans les calculs, notamment lorsqu'on gagne en simplicité ce qu'on perd en précision. » (Page 179)

Progrès et aboutissement.

Aspect 1 : **Mobilisation** (acte qui consiste à tirer de la mémoire les éléments appropriés).
Aspect 2 : **Organisation** (combinaison et adaptation des éléments identifiés comme pertinents).
Aspect 3 : Evolution de la conception du problème.
Aspect 4 : Prévision des étapes qui constitueront le raisonnement final.

« Qu'est-ce que le progrès dans la marche vers la solution ? C'est une progression de la mobilisation et de l'organisation de nos connaissances, une évolution de notre conception du problème, une prévision croissante des étapes qui constitueront le raisonnement final.» (Page 183)

Le Raisonnement heuristique.

« Le raisonnement heuristique est un raisonnement que l'on considère non comme final et rigoureux, mais simplement comme provisoire et plausible et dont l'objet est de découvrir la solution du problème à traiter. […] Dans la construction d'une démonstration rigoureuse le raisonnement heuristique joue le rôle de l'échafaudage dans la construction d'une maison. Il est souvent fondé sur l'induction ou l'analogie. Le raisonnement heuristique est bon en soi ; ce qui est mauvais, c'est de le mêler à la démonstration rigoureuse ; ce qui est pire, c'est de le présenter comme une telle démonstration. » (Pages 185-186)

Regardez bien l'inconnue.

Il est important de garder à l'esprit le but à atteindre. Dans le cas des problèmes à résoudre, il s'agit de l'inconnue. Dans le cas des problèmes à démontrer, il s'agit de la conclusion.
Il n'est pas toujours possible de trouver un problème, parmi les problèmes déjà résolus, qui ait la même inconnue.
« Connaître ou non un problème déjà résolu qui ait la même inconnue constitue souvent toute la différence entre un problème facile et un problème difficile. […] Si donc nous ne parvenons pas à trouver un problème déjà résolu qui ait la même inconnue que le problème présenté, nous essaierons d'en trouver un qui ait une inconnue similaire. » (Page 196)

Règles de la découverte.

« Trouver des règles infaillibles applicables à toutes sortes de problèmes n'est qu'un vieux rêve philosophique, sans aucune chance de réalisation. Une heuristique raisonnable ne recherche pas de règles infaillibles, mais peut s'efforcer d'étudier des méthodes – processus mental, formes, étapes du raisonnement – particulièrement utiles pour la solution des problèmes. » (Page 199)

II. Ebauche d'un point de vue didactique sur le travail de Polya.

1) Comment apporter une réponse à une question Q.

Ce que Polya décrit dans son ouvrage peut être analysé dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique par le schéma herbartien, schéma qui modélise le processus d'étude d'une question, ou encore processus d'enquête.

Dans *La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder*, pages 21 à 24, Yves Chevallard expose comment apporter une réponse à une question *Q*.

On forme un système didactique autour de *Q*, $S(X, Y, Q)$, où X est un groupe de personnes étudiant la question Q sous la supervision d'un groupe de personnes Y (X et Y pouvant être réduits à un seul individu, avec éventuellement $X = Y$), dans le but d'apporter une réponse à *Q*, réponse que nous noterons $R^{\heartsuit}$; on aura ainsi $S(X, Y, Q) \hookrightarrow R^{\heartsuit}$.

Pour élaborer la réponse $R^{\heartsuit}$, il s'agit de rassembler un ***milieu de travail*** *M* réunissant ensemble des ***ressources*** que *X* pourra utiliser. Parmi ces ressources, certaines seront des réponses « toutes faites » à *Q*, validées par telle ou telle institution, et qu'on note $R^{\lozenge}$ (« *R* poinçon »). L'analyse de ces réponses fournira des matériaux pour la construction de la réponse notée $R^{\heartsuit}$. D'autres matériaux seront des œuvres *O* de la culture, qui peuvent être issues de diverses disciplines établies. On a donc:

Schéma herbartien semi développé : $(S(X, Y, Q) \curvearrowright M) \hookrightarrow R^{\heartsuit}$;

Schéma herbartien développé : $(S(X, Y, Q) \curvearrowright \{R^{\lozenge}_1, R^{\lozenge}_2, \ldots, R^{\lozenge}_n, O_{n+1}, \ldots, O_m\}) \hookrightarrow R^{\heartsuit}$.

Le processus d'étude de *Q* conjuguera l'observation et l'analyse de $R^{\lozenge}$, généralement à l'aide d'œuvres, mais aussi leur évaluation et leur développement afin de constituer une réponse $R^{\heartsuit}$, qu'il s'agira ensuite de défendre et de diffuser.

Polya décrit comment un élève (ou un groupe d'élèves) étudie une question Q (un problème mathématique) sous la conduite du professeur. Les éléments qui sont regroupés par les élèves dans **le milieu** sous la direction du professeur sont :

►une figure et le travail expérimental qui peut être réalisé sur cette figure ;
►les problèmes similaires déjà résolus ;
►les connaissances précédemment acquises (définitions ; théorèmes démontrés) ;
►les énoncés de nouveaux problèmes (obtenus par particularisation, analogie, généralisation, etc.) ;
►les éventuels éléments auxiliaires ou problèmes auxiliaires.

A l'heure actuelle, ce milieu peut être enrichi davantage, notamment :

►à l'aide des calculatrices graphiques ;
►à l'aide de logiciels de géométrie dynamique, de calcul formel, de programmation, du tableur ;
►par une recherche d'informations sur Internet.

Ma proposition dans la IIIe partie montrera notamment comment il est possible d'utiliser le tableur et GeoGebra pour répondre à une question mathématique.

2) Organisation Mathématique (OM) et Organisation Didactique (OD).

Cependant, ce que Polya donne comme technique d'étude d'une question est trop vague encore et demande à être précisé.

a. Tout d'abord, Polya n'opère pas de distinction entre un problème pour lequel l'environnement technologico-théorique est disponible (problème d'application dans le cadre du travail d'une OM déjà constituée) et un problème pour lequel il est à constituer (problème inédit pour les élèves, lors du moment de première rencontre avec une tâche d'un type nouveau pour eux). **Comment dresser un plan dans le deuxième cas ?**

Polya semble sous-entendre qu'il décrit une méthode permettant d'étudier des **problèmes inédits**. En effet, il définit les « **problèmes de routine** » de la façon suivante à la page 180 :

« En général on fait entrer dans cette catégorie tout problème qu'on peut résoudre soit en substituant simplement des données nouvelles à celles d'un problème déjà résolu, soit en suivant pas à pas la trace de quelque vieil exemple défraîchi. […] Les problèmes de routine – même employés en grand nombre – peuvent être utiles dans l'enseignement des mathématiques, mais il serait inexcusable de ne donner à des élèves que des problèmes de ce type. »

Cependant, il n'explique pas comment faire en sorte que les élèves soient réellement outillés pour résoudre un problème complètement inédit pour eux. Un exemple caractéristique est la question qui se pose lors de la mise à exécution du plan pour calculer la diagonale d'un parallélépipède rectangle. Le seul point délicat, lors de la rédaction de la démonstration, est la justification du fait que le triangle auxiliaire introduit est effectivement rectangle. Polya écrit à la page 19 :

« Il est donc préférable, pour le professeur, de renoncer à poser cette question ([Mais pouvez-vous démontrer que ce triangle est bien un triangle rectangle ?]), à moins que sa classe n'ait été réellement bien initiée à la géométrie dans l'espace. Et, même dans ce cas, on court le risque que la réponse à une question incidente ne devienne, pour la majorité des élèves, la difficulté principale. »

Si l'on laisse de côté la justification du fait que le triangle est effectivement rectangle, ce problème est un simple problème d'application du théorème de Pythagore.

Si l'on souhaite prendre cette justification en charge, Polya semble dire que cela ne pourrait se faire qu'**après** initiation à la géométrie dans l'espace (sans qu'il précise comment une initiation motivée pourrait se dérouler), ce qui en ferait là encore un problème d'**application** et pas un problème réellement inédit (relatif à une OM à mettre en place).

Un outil apporté par la Théorie Anthropologique du Didactique qui permet de comprendre cette distinction est celui des *moments didactiques*, ou *moments de l'étude*, définis par Yves Chevallard :

« Groupe I (Activités d'étude et de recherche [AER])

1. Moment *de la (première) rencontre* avec *T* ;
2. Moment de l'*exploration* de *T* et *de l'émergence de la technique* τ ;
3. Moment de la construction *du bloc technologico-théorique* [θ,Θ], .

Groupe II (Synthèses) 4. Moment *de l'institutionnalisation*.

Groupe III (Exercices & problèmes)

5. Moment *du travail* de l'OM (et en particulier *de la technique*).

Groupe IV (Contrôles)

6. Moment *de l'évaluation*. » (Chevallard, 2002 [1], pages 11-12)

Il semble que Polya décrive une méthode permettant de résoudre des problèmes lors du travail d'une OM (tous les théorèmes et propriétés étant soit disponibles pour avoir été établis de manière déductive, ou admis de manière expérimentale), sans que cette OM soit précisée. Or, ces moments de l'étude ne sont pas indépendants de l'OM qu'ils ont vocation à faire émerger, bien au contraire.

« Le principe fondateur des didactiques, au moins au sens qu'a donné Guy Brousseau à ce terme, est que non seulement ce qui est transmis dépend de l'outil avec lequel on prétend réussir sa transmission, mais encore que les organisations de transmission, c'est-à-dire les organisations didactiques, se configurent de façon très étroitement liée à la structure de ce qu'il faut transmettre. En d'autres termes, **les organisations didactiques dépendent fortement des organisations à enseigner : des organisations mathématiques**, dans notre cas. Cet isomorphisme didactico-mathématique est ce que j'exprime à travers une hiérarchie de niveaux de codétermination des OD et des OM. » (Bosch et Gascon, page 9, traduction en français d'un extrait de Chevallard 2001)

b. En outre, Polya n'évoque quasiment jamais la question des **raisons d'être** : Pourquoi voudrait-on calculer la diagonale d'un parallélépipède rectangle ?
Il suggère seulement de rendre le problème concret pour le rendre plus intéressant (par exemple : déterminer d'une manière indirecte la diagonale de la salle de classe).
Il n'est pas toujours possible de rendre un problème concret pour les élèves, et ce n'est pas la seule façon d'en motiver l'étude. Il est nécessaire pour cela d'articuler les types de tâches d'une même Organisation Mathématique **et** d'OM différentes, et de remonter si nécessaire au niveau du secteur ou du domaine.

« On rencontre, du même coup, un phénomène écologique central, celui de la *codétermination* des organisations mathématiques et des organisations didactiques. L'absence de mise en relation du niveau du sujet ou du thème avec les niveaux supérieurs – secteurs et domaines, pour ne pas parler du niveau de la discipline elle-même – rend impossible de penser les relations de motivation entre types de tâches. Du même coup, l'étude d'un sujet ou d'un thème ne saurait mettre en jeu les tâches motivantes que seule la prise en compte des niveaux supérieurs de détermination mathématique permettrait de mobiliser. » (Chevallard, 2002 [2], page 6)

Voici un exemple tiré du même article, page 4 :

« Un animal (disons, un taureau) pèse 520 kg. Peut-on dire qu'il est gros ? Ou du moins qu'il est gros pour son âge ? Pour répondre il faut remonter jusqu'au *domaine* même de la statistique : en regardant cet animal comme un *individu* membre d'une certaine *population* (les taureaux de telle race, et de tel âge par exemple), au sein de laquelle on essaiera de le situer du point de vue d'un *caractère* déterminé, son poids. Cela conduira à s'intéresser à un *échantillon* de la population, et à situer le poids observé par rapport à cet échantillon. Pour ce faire, on pourra trouver avantage à comparer le poids en question avec un *résumé numérique* de la série statistique recueillie : ainsi en arrive-t-on au *secteur d'études*. Si la moyenne de la série est de 536 kg, on ne pourra assurément pas dire que l'animal observé est « gros » (par rapport à la série disponible). Mais est-il « proche de la moyenne », est-il « dans la moyenne », ou au contraire est-il « anormalement petit » ? C'est en ce point qu'il faudra de quelque façon faire entrer en jeu la *dispersion* de la série, etc. »

c. Marianna Bosch et Josep Gascón ont représenté plusieurs grands types d'OD dans un espace tridimensionnel dont chaque point représente un type d'OD hypothétique (voir *Figure 2*).
Ils ont choisi pour cela de définir les axes par trois des moments de l'étude : le moment *technologico-théorique*, le moment *du travail de la technique*, et le moment *exploratoire*.
Les OD « unidimensionnelles » se situent sur chacun des trois axes, et sont désignées sous les noms respectifs d'OD *théoricistes, technicistes* et *modernistes.*
À un deuxième niveau, trois autres types d'OD sont caractérisées par le fait de prendre en compte l'intégration de deux moments parmi les trois moments de référence – ils se situeront donc en chacun des plans de coordonnées de l'espace tridimensionnel.

Types d'OD mixtes	**Moments combinés**	**Caractéristiques**	**Modèle épistémologique associé**
OD *classiques*	►technologico-théorique ►travail de la technique	Relative trivialisation de l'activité de résolution de problèmes.	*Euclidianisme* (activité mathématique presque déterminée par le bloc technologico-théorique, d'où découleraient techniques et problèmes en tant que simples « applications » des définitions, axiomes et théorèmes).
OD *empiristes*	►exploratoire ►travail de la technique	►Rôle prépondérant attribué à la résolution de problèmes, vue comme moteur du processus didactique. ►Apprentissage des mathématiques vu comme un processus inductif fondé sur l'imitation et la pratique.	*Quasi empirisme (Lakatos)*
OD *constructivistes*	►technologico-théorique ►exploratoire	►Contextualisation de l'activité de résolution de problèmes située dans une activité plus large de construction de connaissances. ►Apprentissage vu comme un processus actif de construction à partir d'acquis antérieurs et sous des contraintes déterminées.	*Constructivisme*

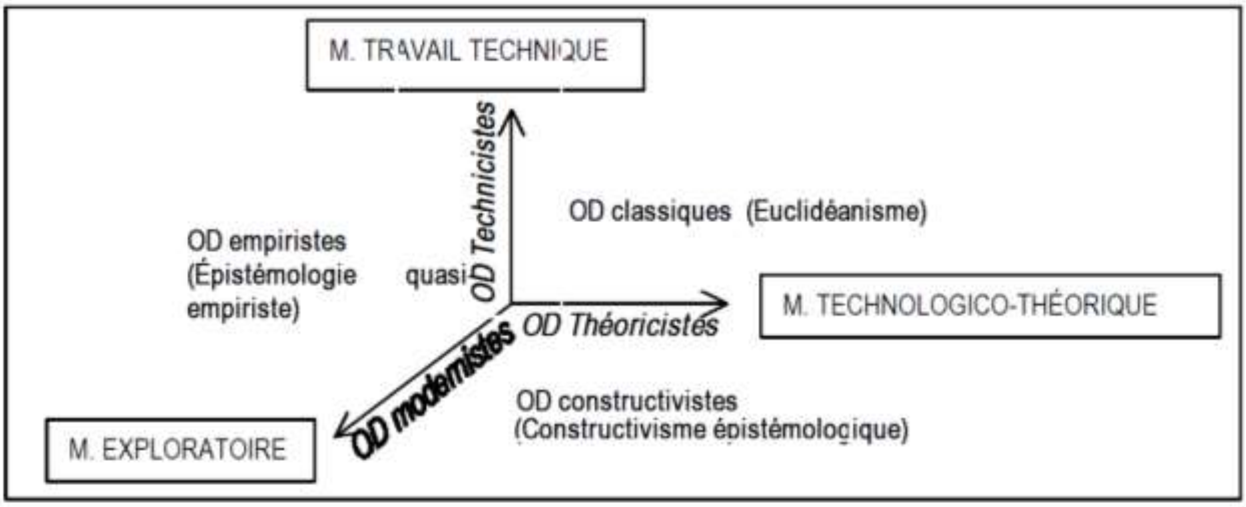


Figure 2. « Espace » des organisations didactiques selon les moments dominants

Les types d'OD ainsi schématisés sont des types idéaux qui n'existent « à l'état pur » dans aucune institution scolaire. L'hypothèse des auteurs est que les OD existantes dans les institutions scolaires relèvent de chacun de ces types idéaux et possèdent donc un caractère mixte plus complexe.

Il me semble que le travail de Polya s'inscrit dans un modèle épistémologique **quasi empiriste**.
►En effet, il dit à la page 91 :
« Le futur mathématicien s'instruit, comme tout le monde, par l'imitation et la pratique. »
►De manière générale, très peu de place est accordée au bloc technologico-théorique dans son ouvrage, mis à part le retour aux définitions préconisé, ainsi que l'utilisation de théorèmes connus.
►Polya établit une distinction entre les « problèmes à résoudre » et les « problèmes à démontrer » mais ne donne que peu d'exemples concernant ces derniers.

Quelques éléments indiquent cependant qu'il n'est pas entièrement dans ce modèle. Il accorde une place très importante à la vérification du résultat et à la vérification des étapes du raisonnement, ce qui nous donne sur quelques exemples des éléments technologiques (même si l'OM à laquelle ils se rapportent n'est pas explicité). Quelques citations illustrent cela :

« Un raisonnement présenté d'une façon correcte, dans un ouvrage ou sur un tableau, pourra cependant n'être ni intelligible, ni instructif s'il ne fait pas comprendre **le but des étapes successives** qui y ont conduit, si le lecteur – ou l'auditeur – n'arrive pas à déterminer **la façon dont ce raisonnement a été obtenu**, si la présentation de la solution ne lui suggère aucun moyen de découvrir par lui-même un raisonnement du même type. » (page 117)

« Les mathématiques présentées avec rigueur sont une science systématique, **déductive**, mais les mathématiques en gestation sont une science expérimentale, **inductive**. » (page 112)

« En exécutant notre plan, nous en vérifions chaque détail ; pour ce faire, nous pouvons nous fonder **soit sur notre intuition, soit sur les règles formelles**, chacune de ces bases prenant à son tour le pas sur l'autre. C'est un exercice à la fois intéressant et utile que d'employer les deux. » (page 121)

3) A propos de dévolution.

La première phase du travail, nommée par Polya « Comprendre le problème », n'est pas sans rappeler le terme de *dévolution* introduit par Guy Brousseau. Alain Kuzniack décrit ainsi ce processus de dévolution :

« Tout l'art du professeur va être de faire accepter à l'élève d'entrer dans une situation adidactique. Il doit ainsi parvenir à ce que la résolution du problème soit de la responsabilité de l'élève. *La dévolution est l'acte par lequel le professeur obtient que l'élève accepte, et peut accepter, d'agir dans une situation adidactique. Il accepte les conséquences de ce transfert, en prenant le risque et la responsabilité de ses actes dans des conditions incertaines.*
Le professeur s'efforce d'exclure de ses interventions celles qui ont trait à la solution. La conception et la gestion de l'incertitude des situations adidactiques sont les parties les plus difficiles de l'acte didactique. Le premier paradoxe de la dévolution est que le maître souhaite que l'élève ne veuille tenir la réponse que de lui-même mais en même temps il veut, il a le devoir social de vouloir, que l'élève donne la bonne réponse. » (Kuzniak, page 29)

Comme nous l'avons dit précédemment, Polya ne fait pas la distinction dans son ouvrage entre les problèmes dits « d'application » et les problèmes réellement neufs pour les élèves (ceux qui les confrontent à une OM nouvelle pour eux). S'il s'agit d'une première rencontre avec un certain type de tâches (par exemple : calculer la distance entre deux points de l'espace), il convient d'enrober – lorsque c'est possible - la tâche mathématique dans un habillage adidactique pour favoriser ce processus de dévolution.

Ainsi, le problème proposé par Polya comme « problème d'application » pourrait en fait être posé tel quel à des élèves de Seconde comme problème de départ, dans le cadre de la reprise de l'étude de la géométrie dans l'espace :

« On doit dresser un mât de huit mètres de haut au centre du toit plat et rectangulaire d'un bâtiment de 21 mètres de long et 16 mètres de large. Il faut pour soutenir le mât quatre câbles d'égale longueur. Les câbles doivent partir d'un même point, situé à 2 mètres du sommet du mât, et aboutir aux quatre coins du toit. Quelle est la longueur de chacun de ces câbles ? »

On pourrait imaginer un **guide de questions cruciales** partant de ce problème-là.

« Le point de départ d'une AER se trouve, en principe, dans l'évocation (au moins), voire dans la réalisation dans la classe (au plus) d'une *situation du monde s* = {σ ; ✓ ; *x, x', x"*, ...} incluant un *système* σ et des *acteurs x, x', x"*, etc., ayant à accomplir une *tâche* ✓ – la tâche « coche » – relative à σ. Les énoncés traditionnels de l'arithmétique scolaire sont à cet égard typiques : on y évoquera par exemple une situation du monde dans laquelle « un paysan, *x*, doit expédier un lot de 250 œufs dans des boîtes pouvant contenir chacune 6 œufs », […] Notez qu'il n'y a là aucune *question* encore; mais voici que, pour accomplir la tâche ✓, censée être d'un type culturellement – sinon pratiquement – familier aux élèves (ranger des œufs dans des boîtes à œufs, etc.), les acteurs de la situation du monde sont amenés à devoir accomplir une certaine tâche *t*, supposée pour eux *problématique* : pour le paysan, il s'agira de déterminer combien de boîtes exactement il devra se procurer […] Et c'est cette tâche problématique *t*, d'un type *T* qui est « à étudier », qu'il sera demandé aux élèves de chercher à accomplir en lieu et place des acteurs évoqués par l'énoncé du « problème ». C'est en ce point, donc, que, chaque fois, tout démarre. »

(Chevallard, 2007, pages 30-31)

III. Une proposition en classe de terminale STG.

J'ai choisi de faire une proposition d'un début de séquence en terminale STG en m'appuyant sur le questionnement préconisé par Polya ainsi que sur mon équipement praxéologique de professeur fondé sur la TAD, sur le thème : Optimisation à deux variables.

Etant donné que la majorité des exemples proposés par Polya sont des exemples géométriques, j'ai choisi un thème algébrique pour illustrer comment son questionnement peut-être pertinent dans un autre cadre.

De plus, j'illustre sur ce début de séquence comment on peut utiliser les outils technologiques à notre disposition pour enrichir le milieu didactique et permettre aux élèves d'aborder un problème totalement inédit pour eux.

Ma proposition a pour but de montrer :

►comment le moment de la première rencontre avec l'OM peut être organisé ; ►comment l'exploration d'un type de tâches peut être organisée ; ►comment on peut mettre en place certains ingrédients de l'OM à constituer.

Voici ce que préconise l'actuel programme de terminale STG :

Optimisation à deux variables Droite d'équation $ax + by = c$.	Représenter la droite d'équation $ax + by = c$.	Faire le lien avec la forme $y = mx + p$ ou $x = k$. Exemples : coût constant, profit constant.
Régionnement du plan.	Caractériser analytiquement un demi-plan.	Caractérisation d'un demi-plan par une inéquation du type $ax + by > c$ ou $ax + by \geq c$. Exemple : seuil de rentabilité à deux produits.
	Résoudre graphiquement un système d'inéquations linéaires. Caractériser une région polygonale convexe donnée.	Une région polygonale convexe étant représentée dans un repère du plan, on la caractérise par un système d'inéquations linéaires.
Programmation linéaire.	Résoudre graphiquement un problème qui conduit à maximiser ou minimiser une expression du type $ax + by$ sous plusieurs contraintes linéaires.	Exemples : profit maximal, coût minimal. Dans le cas d'une recherche de solutions entières, on peut aborder quelques situations où la résolution peut être effectuée avec un tableur.

Par la suite, je signalerai par la lettre P ce qui relève des suggestions de Polya et par le sigle TAD ce qui relève de mon équipement praxéologique de professeur fondé sur la TAD.

Terminale STG

Leçon 8 : OPTIMISATION

Compétences :

1) Représenter graphiquement une droite d'équation : $ax + by = c$.

2) Caractériser analytiquement un demi-plan par une inéquation du type : $ax + by > c$ ou : $ax + by \geq c$.

3) Résoudre graphiquement un système d'inéquations linéaires.

4) Caractériser une région polygonale convexe donnée par un système d'inéquations linéaires.

5) Résoudre graphiquement un problème qui conduit à maximiser ou minimiser une expression du type $ax + by$ sous plusieurs contraintes linéaires.

6) Dans le cas d'une recherche de solutions entières, aborder quelques situations où la résolution peut être effectuée avec un tableur.

Activité N°1 : Un menuisier installe des portes et des fenêtres. Il se fournit chaque mois auprès d'un fabriquant, qui lui propose deux sortes de lots pour ses travaux standards : le lot A est composé de 5 portes et 5 fenêtres, le lot B est composé de 4 portes et 2 fenêtres.
Le menuisier ayant une place limitée, il ne peut pas stocker plus de 120 portes et de 90 fenêtres.
Le bénéfice effectué sur un lot A est de 400 euros et sur un lot B de 200 euros.
On suppose que le menuisier installe la totalité de son stock pendant le mois en cours.
Quel est le nombre de lots A et de lots B que le menuisier doit acquérir et installer pour que son bénéfice mensuel soit le plus grand possible ? Quel sera alors ce bénéfice ?

1) Que feriez-vous pour répondre à la question posée ?

Idée de départ : On peut essayer de voir ce que ça donne « à la main ».
On peut envisager que des élèves de terminale STG, qui ne sont pas à l'aise avec l'écriture algébrique, proposent de commencer ainsi.

Nombre de lots A	Nombre de portes	Nombre de fenêtres
1	5	5
2	10	10
3	15	15

Nombre de lots B	Nombre de portes	Nombre de fenêtres
1	4	2
2	8	4
3	12	6

Ça prendrait énormément de temps d'explorer toutes les possibilités !
Par exemple :
*l'acquisition d'un lot A et d'un lot B donne 9 portes et 7 fenêtres ;
*l'acquisition d'un lot A et de deux lots B donne 13 portes et 9 fenêtres…
Et il faudrait encore calculer le bénéfice correspondant !

2) Peut-on généraliser à l'aide de formules ? Quelles sont les inconnues ? P
Le nombre de lots A et le nombre de lots B.
On note x le nombre de lots A et y le nombre de lots B que le menuisier achète un mois donné à son fournisseur.

Quelles sont les données ? P
Chaque lot A est composé de 5 portes et de 5 fenêtres.
On en déduit que x lots A seront composés de $5x$ portes de $5x$ fenêtres.

Chaque lot B est composé de 4 portes et de 2 fenêtres.
On en déduit que y lots B seront composés de $4y$ portes de $2y$ fenêtres.

Les conditions portent sur le nombre total de portes et de fenêtres. On va donc exprimer ces quantités en fonction de x et de y.
Le nombre total de portes est : $5x+4y$
Le nombre total de fenêtres est : $5x+2y$

On peut organiser toutes ces informations à l'aide d'un tableau à double entrée.

	Nombre de portes	Nombre de fenêtres
Nombre de lots A 1 x	 5 $5x$	 5 $5x$
Nombre de lots B 1 y	 4 $4y$	 2 $2y$
TOTAL	$5x+4y$	$5x+2y$

TAD (utilisation d'un ostensif : un tableau à double entrée qui aide à la création et à la manipulation de ces écritures algébriques)

<u>Quelles sont les conditions ?</u> P

Le nombre total de portes doit être inférieur ou égal à 120 : $5x+4y\leq 120$

Le nombre total de fenêtres doit être inférieur ou égal à 90 : $5x+2y\leq 90$

Le nombre de lots A et B sont des quantités positives donc : $x\geq 0$ et $y\geq 0$

On peut résumer toutes ces conditions dans un système d'inéquations : $\begin{cases}5x+4y\leq 120\\ 5x+2y\leq 90\\ x\geq 0\\ y\geq 0\end{cases}$

<u>3) Avez-vous déjà rencontré un problème de ce type ?</u> P

Oui, avec des équations au lieu d'inéquations. On saurait peut-être résoudre le système suivant : $\begin{cases}5x+4y=120\\ 5x+2y=90\end{cases}$

On a appris (il y a longtemps, en Seconde) à résoudre des systèmes par substitution, par combinaison linéaire, et à vérifier graphiquement le résultat obtenu en représentant deux droites et en recherchant les coordonnées de leur point d'intersection.

TAD (évocation d'une technique à deux pendants prenant en charge la vérification graphique)

On peut remarquer ici qu'en soustrayant la 2^{e} ligne à la première, on parvient à éliminer l'inconnue x (cas particulier de la méthode de combinaison). En effet, on obtient : $2y=30$, donc $y=\frac{30}{2}=15$.

En remplaçant y par sa valeur dans la première équation ou la seconde, on peut déterminer la valeur de x : $5x+2y=90$, donc : $5x+30=90$, donc : $5x=60$ et $x=\frac{60}{5}=12$.

Le système considéré a donc une seule solution : $(12;15)$

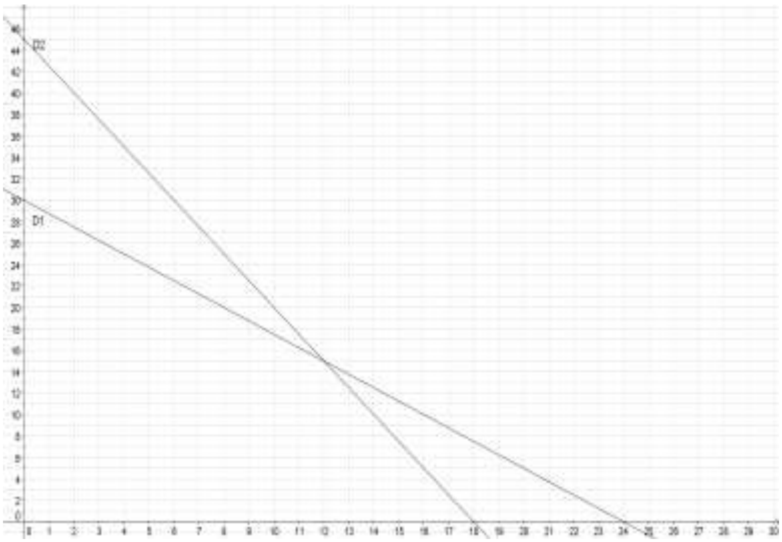
Comment peut-on vérifier que cette solution convient ? P

►<u>Par le calcul</u>, en remplaçant $(x;y)$ par $(12;15)$ dans les deux équations. On obtient :
$5\times 12+4\times 15=60+60=120$ et $5\times 12+2\times 15=60+30=90$

►<u>Méthode de vérification graphique</u> :
$5x+4y=120$ est une « équation de droite déguisée ». On pourrait isoler y pour obtenir l'équation réduite correspondante : $4y=-5x+120$ Ce qui donne : $y=-\frac{5}{4}x+30$

De la même façon, on transforme $5x+2y=90$ en : $y=-\frac{5}{2}x+45$

On complète un tableau de valeurs pour représenter chacune de ces droites en s'aidant de la calculatrice pour choisir des valeurs de x adaptées (qui donnent une valeur de y entière).



D1

x	0	12
y	30	15

D2

x	0	10
y	45	20

On constate graphiquement que les deux droites se coupent au point A de coordonnées $(12;15)$. Peut-être que cela aura son importance par la suite, mais on n'en sait rien pour le moment.

4) Revenons à présent à notre système de conditions : $\begin{cases} 5x+4y \le 120 \\ 5x+2y \le 90 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$ **Pourrait-on le résoudre graphiquement, comme on sait le faire pour un système de deux équations ?**

(Faire une figure) P

Comment interpréter graphiquement les conditions $x \ge 0$ **et** $y \ge 0$ **?**

Les deux conditions $x \ge 0$ et $y \ge 0$ signifient que l'on est dans le premier quadrant.

Comment interpréter graphiquement la condition $5x+4y \le 120$ **?**

On peut vérifier que les coordonnées des points à coordonnées entières situés sur la droite D_1 sont solution car elles vérifient l'égalité : $5\times 0+4\times 30=120$ **;** $5\times 4+4\times 25=120$ Etc. …

En testant sur quelques exemples, on constate que les points situés en-dessous de la droite conviennent, et ceux situés au-dessus ne conviennent pas.

L'inéquation $5x+4y \le 120$ est équivalente à : $4y \le -5x+120$, elle-même équivalente à: $y \le -\frac{5}{4}x+30$.

Les solutions sont donc les coordonnées des points qui se trouvent **en-dessous** de la droite D_1, frontière incluse car l'inégalité est large. On hachure le demi-plan qui ne convient pas.

TAD*(Les élèves savent résoudre graphiquement des inéquations de la forme :* $f(x) \le k$ *ou encore* $f(x) \le g(x)$*, mais c'est la première fois qu'ils ont à résoudre ce type d'inéquation.*

Ce résultat sera comparé à ce que l'on peut obtenir à l'aide du tableur un peu plus loin.

Pas de justification théorique à ce moment-là. Il est nécessaire que les élèves aient rencontré plusieurs spécimens du type de tâches « Résoudre une inéquation de la forme $ax+by \le c$ » avant *d'institutionnaliser la technique relative à ce type de tâches et de la justifier de façon déductive.)*

Comment interpréter graphiquement la condition $5x+2y \leq 90$ **?**

L'inéquation $5x+2y \leq 90$ est équivalente à : $2y \leq -5x+90$, elle-même équivalente à: $y \leq -\frac{5}{2}x+45$.

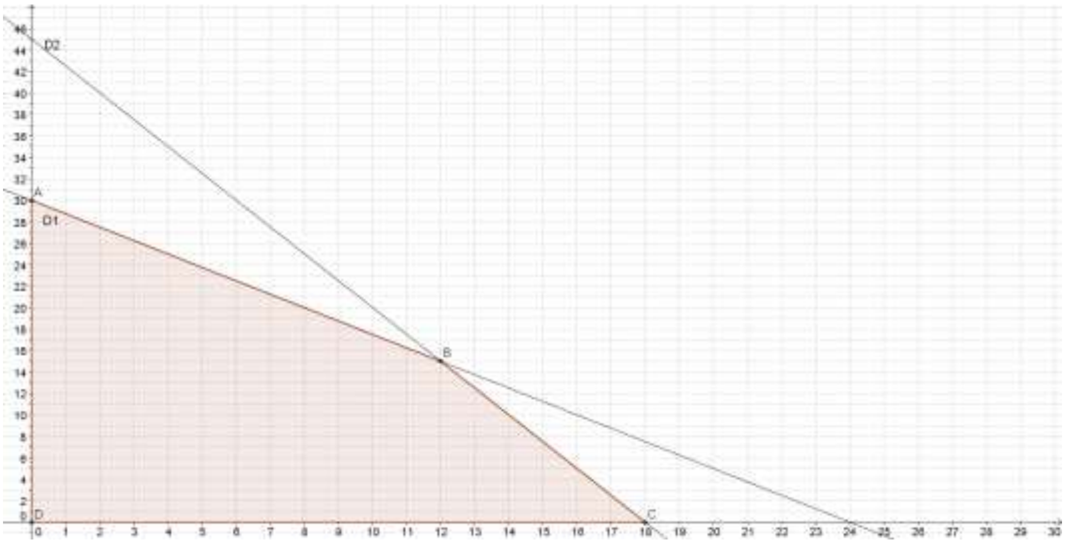
Les solutions sont donc les coordonnées des points qui se trouvent **en-dessous** de la droite D_2, frontière incluse car l'inégalité est large. On hachure le demi-plan qui ne convient pas.

Graphiquement, quelles sont donc les solutions du système $\begin{cases} 5x+4y \leq 120 \\ 5x+2y \leq 90 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$?

On hachure en outre les parties du plan qui correspondent à $x<0$ et à $y<0$.

Les solutions sont les coordonnées des points (à coordonnées entières) situés dans la zone qui n'a pas été hachurée.

On peut vérifier sur quelques exemples que c'est effectivement le cas.



Pouvez-vous vous servir du résultat ? (Même s'il ne s'agit ici que d'un résultat partiel) P

<u>Exemples de questions que l'on peut se poser :</u>

►Le menuisier peut-il commander 10 lots A et 12 lots B ?

D'après le graphique, oui, car le point de coordonnées $(10;12)$ est dans la zone solution.

<u>Preuve par le calcul</u> : $5\times10+4\times12=50+48=98<120$ **Et** $5\times10+2\times12=50+24=74<90$

Le couple $(10;12)$ est donc bien une solution du système.

►Le menuisier peut-il commander 16 lots A et 6 lots B ?

D'après le graphique, non, car le point de coordonnées $(16;6)$ est hors zone.

<u>Preuve par le calcul</u> : $5\times16+4\times6=80+24=104<120$ **Mais** $5\times16+2\times6=80+12=82>90$

Le couple $(16;6)$ n'est donc pas une solution du système.

►Le menuisier peut-il commander 4 lots A et 26 lots B ?

D'après le graphique, non, car le point de coordonnées $(4;26)$ est hors zone.

Preuve par le calcul : $5\times4+4\times26=20+104=124>120$

Et $5\times4+2\times26=20+52=72<90$

Le couple $(4;26)$ n'est donc pas une solution du système.

5) Pourrait-on obtenir le résultat différemment ? Au lieu de procéder à de nombreux calculs à la main, comment pourrait-on utiliser le tableur pour nous aider ? P

a. On s'intéresse dans un premier temps au nombre de portes obtenu en fonction du nombre de lots A et B achetés. (*Ne gardez qu'une partie de la condition, négligez l'autre partie.)* P

Nombre de portes

Nb de lots A \ Nb de lots B	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
0	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80	84	88	92	96	100	104	108	112	116	120
1	5	9	13	17	21	25	29	33	37	41	45	49	53	57	61	65	69	73	77	81	85	89	93	97	101	105	109	113	117	121	125
2	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54	58	62	66	70	74	78	82	86	90	94	98	102	106	110	114	118	122	126	130
3	15	19	23	27	31	35	39	43	47	51	55	59	63	67	71	75	79	83	87	91	95	99	103	107	111	115	119	123	127	131	135
4	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80	84	88	92	96	100	104	108	112	116	120	124	128	132	136	140
5	25	29	33	37	41	45	49	53	57	61	65	69	73	77	81	85	89	93	97	101	105	109	113	117	121	125	129	133	137	141	145
6	30	34	38	42	46	50	54	58	62	66	70	74	78	82	86	90	94	98	102	106	110	114	118	122	126	130	134	138	142	146	150
7	35	39	43	47	51	55	59	63	67	71	75	79	83	87	91	95	99	103	107	111	115	119	123	127	131	135	139	143	147	151	155
8	40	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80	84	88	92	96	100	104	108	112	116	120	124	128	132	136	140	144	148	152	156	160
9	45	49	53	57	61	65	69	73	77	81	85	89	93	97	101	105	109	113	117	121	125	129	133	137	141	145	149	153	157	161	165
10	50	54	58	62	66	70	74	78	82	86	90	94	98	102	106	110	114	118	122	126	130	134	138	142	146	150	154	158	162	166	170
11	55	59	63	67	71	75	79	83	87	91	95	99	103	107	111	115	119	123	127	131	135	139	143	147	151	155	159	163	167	171	175
12	60	64	68	72	76	80	84	88	92	96	100	104	108	112	116	120	124	128	132	136	140	144	148	152	156	160	164	168	172	176	180
13	65	69	73	77	81	85	89	93	97	101	105	109	113	117	121	125	129	133	137	141	145	149	153	157	161	165	169	173	177	181	185
14	70	74	78	82	86	90	94	98	102	106	110	114	118	122	126	130	134	138	142	146	150	154	158	162	166	170	174	178	182	186	190
15	75	79	83	87	91	95	99	103	107	111	115	119	123	127	131	135	139	143	147	151	155	159	163	167	171	175	179	183	187	191	195
16	80	84	88	92	96	100	104	108	112	116	120	124	128	132	136	140	144	148	152	156	160	164	168	172	176	180	184	188	192	196	200
17	85	89	93	97	101	105	109	113	117	121	125	129	133	137	141	145	149	153	157	161	165	169	173	177	181	185	189	193	197	201	205
18	90	94	98	102	106	110	114	118	122	126	130	134	138	142	146	150	154	158	162	166	170	174	178	182	186	190	194	198	202	206	210
19	95	99	103	107	111	115	119	123	127	131	135	139	143	147	151	155	159	163	167	171	175	179	183	187	191	195	199	203	207	211	215
20	100	104	108	112	116	120	124	128	132	136	140	144	148	152	156	160	164	168	172	176	180	184	188	192	196	200	204	208	212	216	220
21	105	109	113	117	121	125	129	133	137	141	145	149	153	157	161	165	169	173	177	181	185	189	193	197	201	205	209	213	217	221	225
22	110	114	118	122	126	130	134	138	142	146	150	154	158	162	166	170	174	178	182	186	190	194	198	202	206	210	214	218	222	226	230
23	115	119	123	127	131	135	139	143	147	151	155	159	163	167	171	175	179	183	187	191	195	199	203	207	211	215	219	223	227	231	235
24	120	124	128	132	136	140	144	148	152	156	160	164	168	172	176	180	184	188	192	196	200	204	208	212	216	220	224	228	232	236	240
25	125	129	133	137	141	145	149	153	157	161	165	169	173	177	181	185	189	193	197	201	205	209	213	217	221	225	229	233	237	241	245

Quelle formule entrer en B3 pour obtenir le nombre total de portes dans la colonne B à l'aide de la poignée de recopie vers le bas ? =A3*5+$B$2*4

Comment modifier ensuite la formule entrée en B3 pour obtenir le nombre total de portes dans la ligne 3 à l'aide de la poignée de recopie vers la droite ? =$A$3*5+B2*4

Quelles sont les valeurs qui ne vérifient pas la condition sur le nombre de portes ?

Les valeurs qui sont supérieures à 120. On peut les barrer pour faciliter la suite du travail.

Si l'on fixe à 10 le nombre de lots A achetés par le menuisier, combien de lots B peut-il acheter au maximum ?

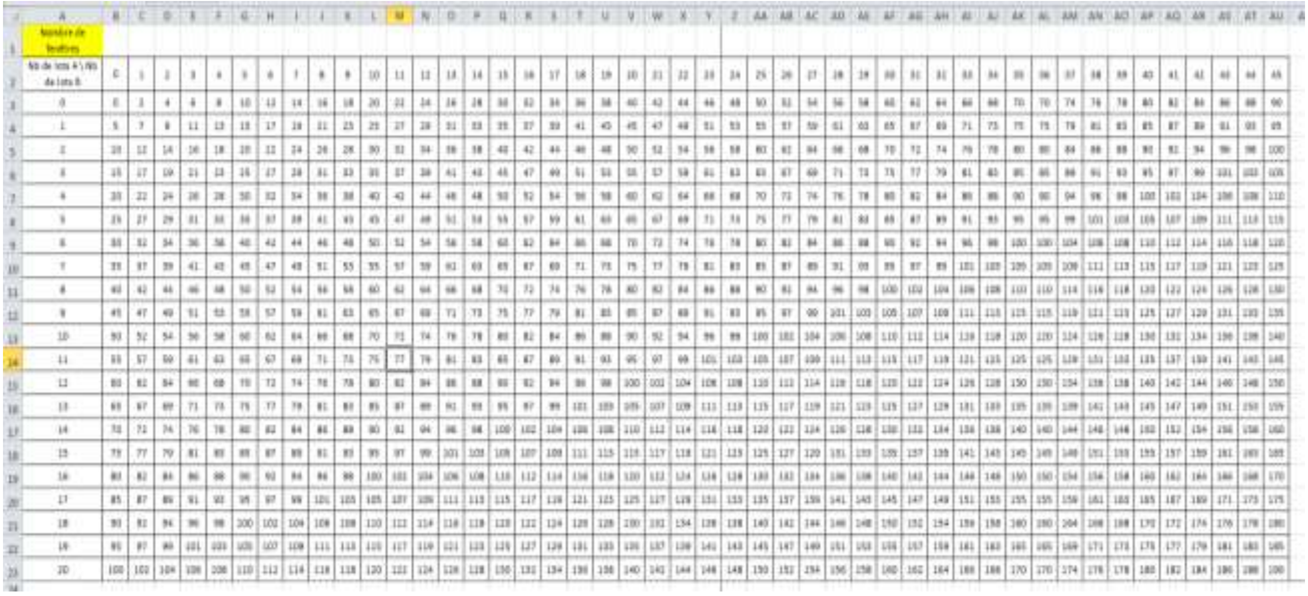
17 lots B, ce qui donnera un total de 118 portes (vérification : $5\times10+17\times4=50+68=118$)

Vérifier que l'on obtient le même résultat par lecture graphique.

Si l'on fixe à 10 le nombre de lots B achetés par le menuisier, combien de lots A peut-il acheter au maximum ?
16 lots A, ce qui donnera un total de 120 portes exactement (vérification : $5\times16+10\times4=80+40=120$) + Vérification graphique.

Combien de lots A et de lots B peut-il acheter au maximum (on n'a considéré jusqu'ici que la condition sur le nombre de portes !) ?
Il peut acheter au maximum 24 lots A (et 0 lot B) ou 30 lots B (et 0 lot A) pour un total de 120 portes. + Vérification graphique.

b. On s'intéresse à présent au nombre de fenêtres obtenus en fonction du nombre de lots A et B achetés. (*Ne gardez qu'une partie de la condition, négligez l'autre partie.)* P



Quelle formule entrer en B3 pour obtenir le nombre total de fenêtres dans la colonne B à l'aide de la poignée de recopie vers le bas ? =A3*5+$B$2*2

Comment modifier ensuite la formule entrée en B3 pour obtenir le nombre total de fenêtres dans la ligne 3 à l'aide de la poignée de recopie vers la droite ? =$A$3*5+B2*2

Quelles sont les valeurs qui ne vérifient pas la condition sur le nombre de fenêtres ?
Les valeurs qui sont supérieures à 90. On peut les barrer pour faciliter la suite du travail.

Si l'on fixe à 10 le nombre de lots A achetés par le menuisier, combien de lots B peut-il acheter au maximum ?
20 lots B, ce qui donnera un total de 90 fenêtres (vérification : $5\times10+20\times2=50+40=90$) +Vérification graphique.

Si l'on fixe à 10 le nombre de lots B achetés par le menuisier, combien de lots A peut-il acheter au maximum ?
14 lots A, ce qui donnera un total de 90 fenêtres (vérification : $5\times14+10\times2=70+20=90$) +Vérification graphique.

Combien de lots A et de lots B peut-il acheter au maximum (on n'a considéré ici que la condition sur le nombre de fenêtres !) ?
Il peut acheter au maximum 18 lots A (et 0 lot B) ou 45 lots B (et 0 lot A) pour un total de 90 fenêtres. +Vérification graphique.

c. Essayons de prendre en compte les deux conditions (celle sur le nombre de portes et celle sur le nombre de fenêtres).
Le menuisier peut-il acheter 20 lots A et 4 lots B ?
Nombre de portes : $5\times20+4\times4=100+16=116<120$: c'est bon !
Nombre de fenêtres : $5\times20+4\times2=100+8=108>90$: ce n'est pas bon !
Il ne peut pas acheter 20 lots A et 4 lots B.
+Vérification à l'aide de la feuille de calcul et vérification graphique.

Le menuisier peut-il acheter 10 lots A et 18 lots B ?
Nombre de portes : $5\times10+4\times18=50+72=122>120$: ce n'est pas bon !
Nombre de fenêtres : $5\times10+2\times18=50+36=86<90$: c'est bon !
Il ne peut pas acheter 10 lots A et 18 lots B.
+Vérification à l'aide de la feuille de calcul et vérification graphique.

<u>6) Peut-on maintenant déterminer pour quel nombre de lots A et B achetés le bénéfice du menuisier sera maximal ?</u>
On peut commencer par utiliser le tableur et faire le lien avec notre représentation graphique, avant de passer à une résolution graphique uniquement.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF
1	BENEFICE																															
2	Nb de lots A \ Nb de lots B	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
3	0	0	200	400	600	800	1000	1200	1400	1600	1800	2000	2200	2400	2600	2800	3000	3200	3400	3600	3800	4000	4200	4400	4600	4800	5000	5200	5400	5600	5800	6000
4	1	400	600	800	1000	1200	1400	1600	1800	2000	2200	2400	2600	2800	3000	3200	3400	3600	3800	4000	4200	4400	4600	4800	5000	5200	5400	5600	5800	6000	6200	6400
5	2	800	1000	1200	1400	1600	1800	2000	2200	2400	2600	2800	3000	3200	3400	3600	3800	4000	4200	4400	4600	4800	5000	5200	5400	5600	5800	6000	6200	6400	6600	6800
6	3	1200	1400	1600	1800	2000	2200	2400	2600	2800	3000	3200	3400	3600	3800	4000	4200	4400	4600	4800	5000	5200	5400	5600	5800	6000	6200	6400	6600	6800	7000	7200
7	4	1600	1800	2000	2200	2400	2600	2800	3000	3200	3400	3600	3800	4000	4200	4400	4600	4800	5000	5200	5400	5600	5800	6000	6200	6400	6600	6800	7000	7200	7400	7600
8	5	2000	2200	2400	2600	2800	3000	3200	3400	3600	3800	4000	4200	4400	4600	4800	5000	5200	5400	5600	5800	6000	6200	6400	6600	6800	7000	7200	7400	7600	7800	8000
9	6	2400	2600	2800	3000	3200	3400	3600	3800	4000	4200	4400	4600	4800	5000	5200	5400	5600	5800	6000	6200	6400	6600	6800	7000	7200	7400	7600	7800	8000	8200	8400
10	7	2800	3000	3200	3400	3600	3800	4000	4200	4400	4600	4800	5000	5200	5400	5600	5800	6000	6200	6400	6600	6800	7000	7200	7400	7600	7800	8000	8200	8400	8600	8800
11	8	3200	3400	3600	3800	4000	4200	4400	4600	4800	5000	5200	5400	5600	5800	6000	6200	6400	6600	6800	7000	7200	7400	7600	7800	8000	8200	8400	8600	8800	9000	9200
12	9	3600	3800	4000	4200	4400	4600	4800	5000	5200	5400	5600	5800	6000	6200	6400	6600	6800	7000	7200	7400	7600	7800	8000	8200	8400	8600	8800	9000	9200	9400	9600
13	10	4000	4200	4400	4600	4800	5000	5200	5400	5600	5800	6000	6200	6400	6600	6800	7000	7200	7400	7600	7800	8000	8200	8400	8600	8800	9000	9200	9400	9600	9800	10000
14	11	4400	4600	4800	5000	5200	5400	5600	5800	6000	6200	6400	6600	6800	7000	7200	7400	7600	7800	8000	8200	8400	8600	8800	9000	9200	9400	9600	9800	10000	10200	10400
15	12	4800	5000	5200	5400	5600	5800	6000	6200	6400	6600	6800	7000	7200	7400	7600	7800	8000	8200	8400	8600	8800	9000	9200	9400	9600	9800	10000	10200	10400	10600	10800
16	13	5200	5400	5600	5800	6000	6200	6400	6600	6800	7000	7200	7400	7600	7800	8000	8200	8400	8600	8800	9000	9200	9400	9600	9800	10000	10200	10400	10600	10800	11000	11200
17	14	5600	5800	6000	6200	6400	6600	6800	7000	7200	7400	7600	7800	8000	8200	8400	8600	8800	9000	9200	9400	9600	9800	10000	10200	10400	10600	10800	11000	11200	11400	11600
18	15	6000	6200	6400	6600	6800	7000	7200	7400	7600	7800	8000	8200	8400	8600	8800	9000	9200	9400	9600	9800	10000	10200	10400	10600	10800	11000	11200	11400	11600	11800	12000
19	16	6400	6600	6800	7000	7200	7400	7600	7800	8000	8200	8400	8600	8800	9000	9200	9400	9600	9800	10000	10200	10400	10600	10800	11000	11200	11400	11600	11800	12000	12200	12400
20	17	6800	7000	7200	7400	7600	7800	8000	8200	8400	8600	8800	9000	9200	9400	9600	9800	10000	10200	10400	10600	10800	11000	11200	11400	11600	11800	12000	12200	12400	12600	12800
21	18	7200	7400	7600	7800	8000	8200	8400	8600	8800	9000	9200	9400	9600	9800	10000	10200	10400	10600	10800	11000	11200	11400	11600	11800	12000	12200	12400	12600	12800	13000	13200

TAD*(Là encore, il s'agit d'un type de tâches totalement inédit pour les élèves dans ce cadre-là. Ils savent uniquement déterminer le maximum d'une fonction à partir de sa représentation graphique ou de son tableau de variations. Il va falloir « faire parler » la feuille de calcul, la représentation graphique et les expressions algébriques pour trouver une solution.)*

Quelle formule entrer en B3 pour obtenir le bénéfice total dans la colonne B à l'aide de la poignée de recopie vers le bas ? =A3*400+$B$2*200

Comment modifier ensuite la formule entrée en B3 pour obtenir le bénéfice total dans la ligne 3 à l'aide de la poignée de recopie vers la droite ? =$A$3*400+B2*200

Pourriez-vous résoudre une partie du problème ? L'introduction d'un problème auxiliaire en considérant un cas particulier du problème initial peut permettre de résoudre celui-ci. P

Si l'on fixe à 10 le nombre de lots A achetés par le menuisier, quel est le bénéfice maximal que le menuisier peut réaliser en restant dans la « zone permise » ?

A l'aide du graphique, on voit que le plus grand nombre de lots B qu'il puisse acheter est de 17. Le bénéfice correspondant sera de 7 400€. (Calcul : $10 \times 400 + 17 \times 200 = 4000 + 3400 = 7400$)

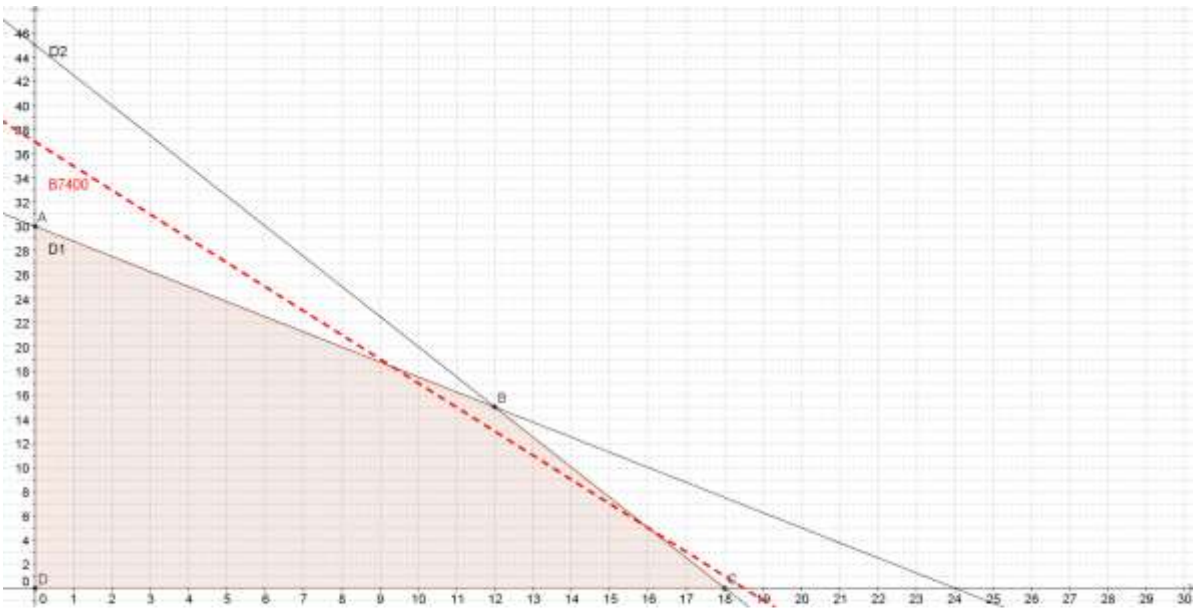
Quelles sont les autres façons pour lui de réaliser un bénéfice de 7 400 € en restant dans la « zone permise » ?

On repère dans la feuille de calcul toutes les cellules dans lesquelles apparaît un bénéfice de 7 400 € et on vérifie graphiquement si on est dans la zone permise ou pas.

$(18;1)$NON $(17;3)$NON $(16;5)$OUI $(15;7)$OUI $(14;9)$OUI $(13;11)$OUI

$(12;13)$OUI $(11;15)$OUI $(10;17)$OUI $(9;19)$NON $(8;21)$NON $(7;23)$NON etc.

On constate que tous ces points sont alignés. On trace la droite à laquelle ils appartiennent. Seulement 7 de ces points sont dans la zone solution. Il y a donc 7 façons pour le menuisier de réaliser un bénéfice de 7 400€ en respectant les conditions qui lui sont imposées.



Sauriez-vous déterminer l'équation de cette droite bénéfice B_{7400} ?

Graphiquement, on constate que cette droite a pour coefficient directeur -2 et pour ordonnée à l'origine 37.

A l'aide de la feuille de calcul :

On peut « voir » également que son coefficient directeur est égal à **-2** : lorsque le nombre de lots A augmente de 1, le nombre de lots B diminue de 2 pour rester à un bénéfice constant de 7400€.

Si le nombre de lots A est égal à 0, le nombre de lots B doit être égal à 37 pour obtenir un bénéfice de 7400€ (on ne le voit pas dans la feuille de calcul car on est allé seulement jusqu'à 30 lots B) ($0 \times 400 + 37 \times 200 = 7400$).

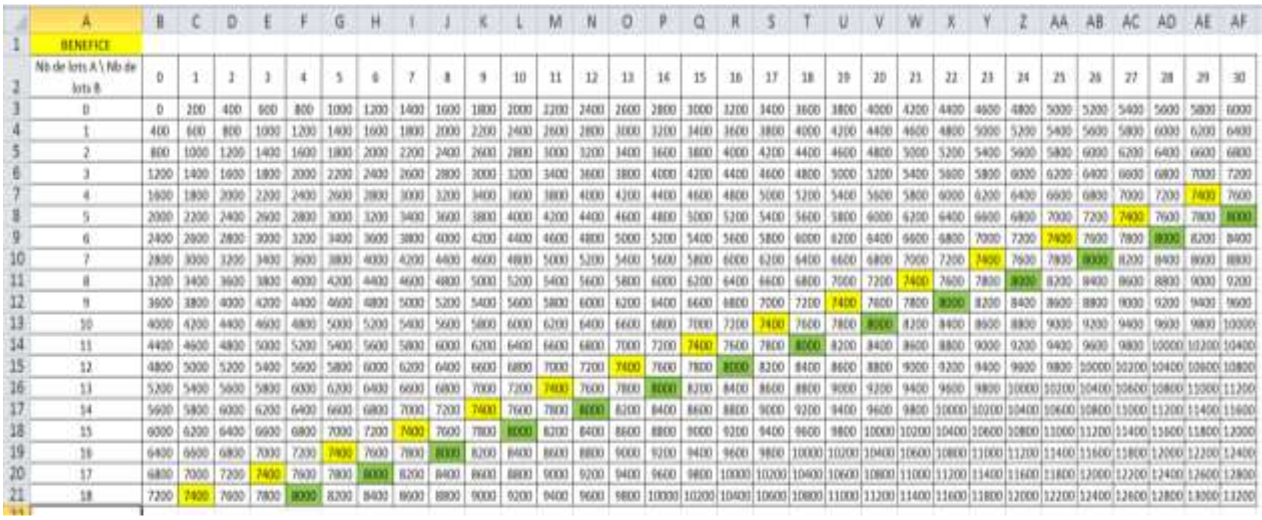
Aurait-on pu déterminer son équation par un calcul en utilisant les données ?
On peut ajouter une colonne « Bénéfice » à notre tableau.

	Nombre de portes	Nombre de fenêtres	Bénéfice
Nombre de lots A 1 x	 5 $5x$	 5 $5x$	 400 $400x$
Nombre de lots B 1 y	 4 $4y$	 2 $2y$	 200 $200y$
TOTAL	$5x+4y$	$5x+2y$	$400x+200y$

TAD*(Retour à notre ostensif pour produire l'expression algébrique du bénéfice)*

Le bénéfice est de 7400 € si et seulement si : $400x+200y=7400$
On peut diviser les deux membres de cette équation par 100, ce qui donne: $4x+2y=74$
On isole ensuite la variable y, et on obtient : $2y=-4x+74$, donc : $y=-2x+37$
La droite bénéfice B_{7400} a donc pour équation réduite : $y=-2x+37$.
Cette équation correspond bien à ce qu'on avait observé graphiquement et dans la feuille de calcul.

Est-il possible pour le menuisier d'obtenir un bénéfice supérieur à 7 400 € tout en restant dans la « zone permise » ?
Avec le tableur, on trouve que le bénéfice pourrait en théorie être égal à 8 000 € par exemple.
Voyons si on est ou pas dans la zone permise dans ce cas.


BENEFICE

Nb de lots A \ Nb de lots B	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
0	0	200	400	600	800	1000	1200	1400	1600	1800	2000	2200	2400	2600	2800	3000	3200	3400	3600	3800	4000	4200	4400	4600	4800	5000	5200	5400	5600	5800	6000
1	400	600	800	1000	1200	1400	1600	1800	2000	2200	2400	2600	2800	3000	3200	3400	3600	3800	4000	4200	4400	4600	4800	5000	5200	5400	5600	5800	6000	6200	6400
2	800	1000	1200	1400	1600	1800	2000	2200	2400	2600	2800	3000	3200	3400	3600	3800	4000	4200	4400	4600	4800	5000	5200	5400	5600	5800	6000	6200	6400	6600	6800
3	1200	1400	1600	1800	2000	2200	2400	2600	2800	3000	3200	3400	3600	3800	4000	4200	4400	4600	4800	5000	5200	5400	5600	5800	6000	6200	6400	6600	6800	7000	7200
4	1600	1800	2000	2200	2400	2600	2800	3000	3200	3400	3600	3800	4000	4200	4400	4600	4800	5000	5200	5400	5600	5800	6000	6200	6400	6600	6800	7000	7200	7400	7600
5	2000	2200	2400	2600	2800	3000	3200	3400	3600	3800	4000	4200	4400	4600	4800	5000	5200	5400	5600	5800	6000	6200	6400	6600	6800	7000	7200	7400	7600	7800	8000
6	2400	2600	2800	3000	3200	3400	3600	3800	4000	4200	4400	4600	4800	5000	5200	5400	5600	5800	6000	6200	6400	6600	6800	7000	7200	7400	7600	7800	8000	8200	8400
7	2800	3000	3200	3400	3600	3800	4000	4200	4400	4600	4800	5000	5200	5400	5600	5800	6000	6200	6400	6600	6800	7000	7200	7400	7600	7800	8000	8200	8400	8600	8800
8	3200	3400	3600	3800	4000	4200	4400	4600	4800	5000	5200	5400	5600	5800	6000	6200	6400	6600	6800	7000	7200	7400	7600	7800	8000	8200	8400	8600	8800	9000	9200
9	3600	3800	4000	4200	4400	4600	4800	5000	5200	5400	5600	5800	6000	6200	6400	6600	6800	7000	7200	7400	7600	7800	8000	8200	8400	8600	8800	9000	9200	9400	9600
10	4000	4200	4400	4600	4800	5000	5200	5400	5600	5800	6000	6200	6400	6600	6800	7000	7200	7400	7600	7800	8000	8200	8400	8600	8800	9000	9200	9400	9600	9800	10000
11	4400	4600	4800	5000	5200	5400	5600	5800	6000	6200	6400	6600	6800	7000	7200	7400	7600	7800	8000	8200	8400	8600	8800	9000	9200	9400	9600	9800	10000	10200	10400
12	4800	5000	5200	5400	5600	5800	6000	6200	6400	6600	6800	7000	7200	7400	7600	7800	8000	8200	8400	8600	8800	9000	9200	9400	9600	9800	10000	10200	10400	10600	10800
13	5200	5400	5600	5800	6000	6200	6400	6600	6800	7000	7200	7400	7600	7800	8000	8200	8400	8600	8800	9000	9200	9400	9600	9800	10000	10200	10400	10600	10800	11000	11200
14	5600	5800	6000	6200	6400	6600	6800	7000	7200	7400	7600	7800	8000	8200	8400	8600	8800	9000	9200	9400	9600	9800	10000	10200	10400	10600	10800	11000	11200	11400	11600
15	6000	6200	6400	6600	6800	7000	7200	7400	7600	7800	8000	8200	8400	8600	8800	9000	9200	9400	9600	9800	10000	10200	10400	10600	10800	11000	11200	11400	11600	11800	12000
16	6400	6600	6800	7000	7200	7400	7600	7800	8000	8200	8400	8600	8800	9000	9200	9400	9600	9800	10000	10200	10400	10600	10800	11000	11200	11400	11600	11800	12000	12200	12400
17	6800	7000	7200	7400	7600	7800	8000	8200	8400	8600	8800	9000	9200	9400	9600	9800	10000	10200	10400	10600	10800	11000	11200	11400	11600	11800	12000	12200	12400	12600	12800
18	7200	7400	7600	7800	8000	8200	8400	8600	8800	9000	9200	9400	9600	9800	10000	10200	10400	10600	10800	11000	11200	11400	11600	11800	12000	12200	12400	12600	12800	13000	13200

$(18;4)$NON $(17;6)$NON $(16;8)$NON $(15;10)$NON $(14;12)$NON $(13;14)$NON
$(12;15)$NON $(11;17)$NON $(10;19)$NON $(9;21)$NON $(8;23)$NON $(7;25)$NON etc.
Aucun point ne convient. Le bénéfice du menuisier ne peut donc pas être égal à 8000€.

On place les points correspondant dans le repère et on constate que :
*tous ces points sont « hors zone ».
*tous ces points sont alignés. On trace la droite à laquelle ils appartiennent.

On peut déterminer son équation graphiquement, avec la feuille de calcul, et par le calcul :
Le bénéfice est de 8000 € si et seulement si : $400x+200y=8000$

On peut diviser les deux membres de cette équation par 100, ce qui donne: $4x+2y=80$

On isole ensuite la variable y, et on obtient : $2y=-4x+80$, donc : $y=-2x+40$

La droite bénéfice B_{7400} a donc pour équation réduite : $y=-2x+40$.

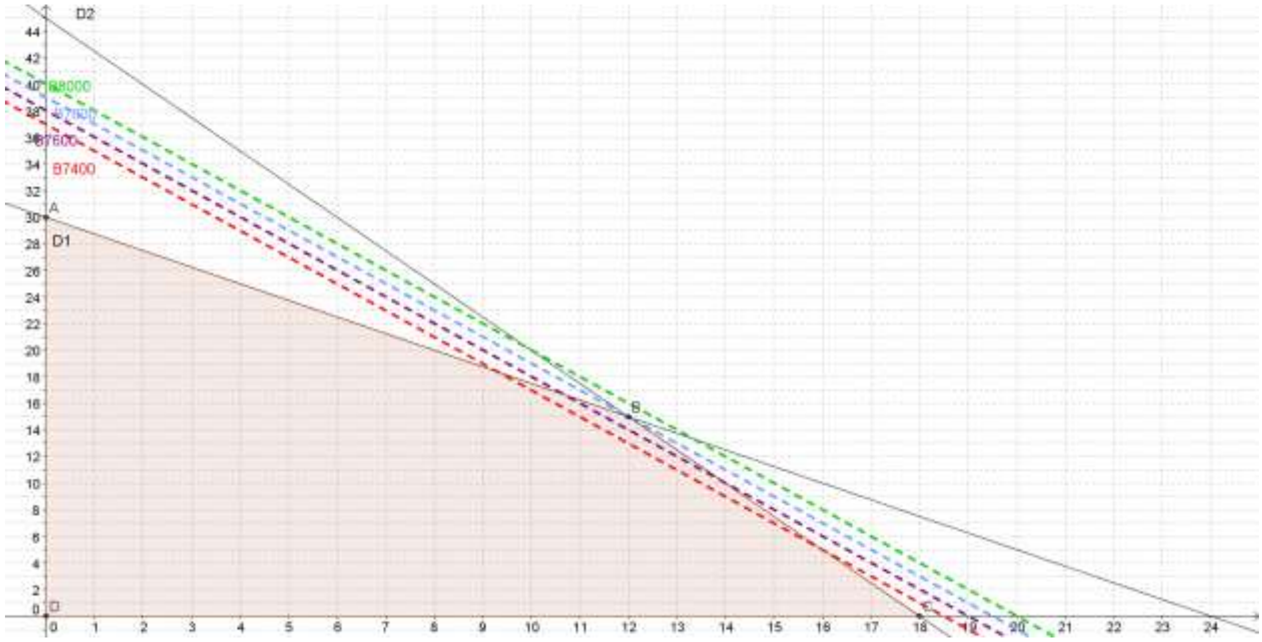
Le bénéfice maximal est donc compris entre 7400 et 8000 €. Selon le tableur, quelle peut être sa valeur ? En reprenant la méthode précédente, déterminer à présent le bénéfice maximal.
Selon le tableur, le bénéfice maximal peut être égal à 7600 € ou à 7800€.
On trace les droites B_{7600} et B_{7800} dans le repère. On commence pour cela par déterminer leur équation réduite : $y=-2x+38$ pour la première et $y=-2x+39$ pour la deuxième.
On les trace ensuite en utilisant leur ordonnée à l'origine et leur coefficient directeur, par exemple.

On constate que toutes ces droites Bénéfice ont le même coefficient directeur et sont donc parallèles entre elles.
On constate que 4 points de la zone permise sont sur la droite B_{7600}:
$(14;10)$OUI $(13;12)$OUI $(12;14)$OUI $(11;16)$OUI
Les autres points à coordonnées entières de cette droite sont « hors-zone ».

Enfin, on constate qu'un seul point de la zone permise est sur la droite B_{7800}: $(12;15)$OUI

On peut donc en déduire que le bénéfice maximal que le menuisier peut réaliser est de 7800€ et qu'il le réalisera s'il achète 12 lots A et 15 lots B.

On peut vérifier avec la feuille de calcul que le bénéfice de 7800 € peut effectivement être obtenu avec 12 lots A et 15 lots B.



Vérification par le calcul : $12 \times 400 + 15 \times 200 = 4800 + 3000 = 7800$
On constate que le point solution est le point d'intersection des droites D_1 et D_2.

On peut également vérifier que nos conditions sont bien vérifiées :
Les nombres sont bien positifs.
D'autre part : $12 \times 5 + 15 \times 4 = 60 + 60 = 120$ et $12 \times 5 + 15 \times 2 = 60 + 30 = 90$
Donc toutes les conditions sont bien vérifiées.

Bilan provisoire :

►Traduire algébriquement les données et les conditions d'un problème peut permettre de gagner du temps lors de sa résolution.
►On peut utiliser un tableau à double entrée pour réussir à traduire en langage mathématique les conditions de l'énoncé.
►Une équation de la forme : $ax + by = c$ est une équation de droite déguisée.
Si $b \neq 0$, on peut isoler y, obtenir ainsi l'équation réduite de la droite et la représenter graphiquement soit avec un tableau de valeurs, soit en utilisant la méthode des escaliers.
Si $b = 0$, l'équation peut s'écrire sous la forme $x = k$, et il s'agit en fait d'une droite verticale.
►On peut utiliser un graphique pour résoudre un système d'inéquations. Pour cela, on résout chaque inéquation de la forme : $ax + by \leq c$ en la transformant en une inéquation de la forme : $y \leq mx + p$ (Attention ! Si on divise par un nombre négatif au cours du processus, il faudra changer le sens de l'inégalité). On hachure le demi-plan qui ne convient pas. Au bout du compte, les solutions sont les coordonnées des points situés dans la partie du plan qui n'a pas été hachurée.
►On peut utiliser le tableur pour résoudre un système d'inéquations.
►Résoudre un cas particulier d'un problème (ici, en fixant une des inconnues puis en fixant la valeur du bénéfice) peut nous aider à trouver sa solution (pour quelles valeurs des inconnues le bénéfice sera maximal).

Il est trop tôt après la résolution de ce premier problème pour faire un bilan d'étape quant à la méthode de détermination du bénéfice maximal.
Il faudra poursuivre l'étude par la résolution d'un deuxième problème d'optimisation.

BIBLIOGRAPHIE :

BOSCH M. & GASCON J. (2002) *Organiser l'étude 2. Théories et empiries*, in Dorier, J.-L. , Artaud, M., Artigue, M., Berthelot, R., Floris, R. (eds) *Actes de la 11e École d'Été de Didactique des Mathématiques* © 2002 - La Pensée Sauvage – Editions - Fabriqué en France.

CHEVALLARD Y. (1994) *Ostensifs et non ostensifs dans l'activité mathématique*, Intervention au Séminaire de l'*Associazione Mathesis* (Turin, 3 février 1994). Texte paru dans les *Actes* du Séminaire pour l'année 1993-1994, p. 190-200.
http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Ostensifs_et_non-ostensifs.pdf

CHEVALLARD Y. (2001) *Aspectos problemáticos de la formación docente*, *XVI Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Di.dáctica de las Matemáticas*, Huesca.
http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=15

CHEVALLARD Y. (2002) *Organiser l'étude 1. Structures et fonctions*, in Dorier, J.-L. , Artaud, M., Artigue, M., Berthelot, R., Floris, R. (eds) *Actes de la 11e École d'Été de Didactique des Mathématiques*
© 2002 - La Pensée Sauvage – Editions - Fabriqué en France.
http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=52

CHEVALLARD Y. (2002) *Organiser l'étude 3. Ecologie et régulation*, in Dorier, J.-L. , Artaud, M., Artigue, M., Berthelot, R., Floris, R. (eds) *Actes de la 11e École d'Été de Didactique des Mathématiques*
© 2002 - La Pensée Sauvage – Editions - Fabriqué en France.
http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Organiser_l_etude_3.pdf

CHEVALLARD Y. (2007) *Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique*.
http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Passe_et_present_de_la_TAD.pdf

CHEVALLARD Y. (2009). *La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD.* Cours donné à la 15e école d'été de didactique des mathématiques (Clermont-Ferrand, 16-23 août 2009).
http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=144

KUZNIAK A. (2004). *La théorie des situations didactiques de Brousseau*, © L'OUVERT 110, pages 17-33.
http://irem.u-strasbg.fr/php/articles/110_Kuzniak.pdf

Pour résoudre un problème vous devez successivement :

I — Comprendre le problème

II — Concevoir un plan

Trouver le rapport entre les données et l'inconnue.

Vous pouvez être obligé de considérer des problèmes auxiliaires si vous ne pouvez trouver un rapport immédiat.

Vous devez obtenir finalement un plan de la solution.

III — Mettre le plan à exécution

IV — Examiner la solution obtenue

COMPRENDRE LE PROBLÈME

- *Quelle est l'inconnue ? Quelles sont les données ? Quelle est la condition ?*
- Est-il possible de satisfaire à la condition ? La condition est-elle suffisante pour déterminer l'inconnue ? Est-elle insuffisante ? Redondante ? Contradictoire ?
- Dessinez une figure. Introduisez la notation appropriée.
- Distinguez les diverses parties de la condition. Pouvez-vous les formuler ?

CONCEVOIR UN PLAN

- L'avez-vous déjà rencontré ? Ou bien avez-vous rencontré le même problème sous une forme légèrement différente ?
- *Connaissez-vous un problème qui s'y rattache ?* Connaissez-vous un théorème qui puisse être utile ?
- *Regardez bien l'inconnue* et essayez de penser à un problème qui vous soit familier et qui ait la même inconnue ou une inconnue similaire.
- *Voici un problème qui se rattache au vôtre et que vous avez déjà résolu. Pourriez-vous vous en servir ?* Pourriez-vous vous servir de son résultat ? Pourriez-vous vous servir de sa méthode ? Vous faudrait-il introduire un élément auxiliaire quelconque pour pouvoir vous en servir ?
- Pourriez-vous énoncer le problème différemment ? Pourriez-vous l'énoncer sous une autre forme encore ? Reportez-vous aux définitions.
- Si vous ne pouvez résoudre le problème qui vous est proposé, essayez de résoudre d'abord un problème qui s'y rattache. Pourriez-vous imaginer un problème qui s'y rattache et qui soit plus accessible ? Un problème plus général ? Un problème plus particulier ? Un problème analogue ? Pourriez-vous résoudre une partie du problème ? Ne gardez qu'une partie de la condition, négligez l'autre partie ; dans quelle mesure l'inconnue est-elle alors déterminée, comment peut-elle varier ? Pourriez-vous tirer des données un élément utile ? Pourriez-vous penser à d'autres données qui pourraient vous permettre de déterminer l'inconnue ? Pourriez-vous changer l'inconnue, ou les données, ou toutes deux s'il est nécessaire, de façon que la nouvelle inconnue et les nouvelles données soient plus rapprochées les unes des autres ?
- Vous êtes-vous servi de toutes les données ? Vous êtes-vous servi de la condition tout entière ? Avez-vous tenu compte de toutes les notions essentielles que comportait le problème ?

METTRE LE PLAN A EXÉCUTION

- En mettant votre plan à exécution, vérifiez-en chaque détail l'un après l'autre. Pouvez-vous voir clairement si ce détail est correct ? Pouvez-vous démontrer qu'il est correct ?

REVENIR SUR LA SOLUTION

- Pouvez-vous vérifier le résultat ? Pouvez-vous vérifier le raisonnement ?
- Pouvez-vous obtenir le résultat différemment ? Pouvez-vous le voir d'un coup d'œil ?
- Pouvez-vous vous servir du résultat ou de la méthode pour quelque autre problème ?