Master de didactique des mathématiques

UE 3.4

Actualité de la recherche en mathématiques

François MOUSSAVOU
PLP MSPC – LRM René Caillié

Présentation du sujet

- **Le principe :**

se mettre en situation de recherche sur un problème mathématique ouvert et observer la spécificité de ce type d’activité.

- **Le sujet :**

  Les nombres premiers

Une première approche

- La conjecture de Goldbach (1690-1764)

$$\boxed{\text{Tout entier pair supérieur à 3 est somme de deux nombres premiers}}$$

Une première approche

Conclusions :

- Aucune activité structurée notable
- Stratégie : exploration de champs connus ou découverts récemment.

Théorème de Chen (1966)

Tout entier pair suffisamment grand
st somme d’un nombre premier et d’un nomb
semi-premier

Redéfinition du sujet

Théorème d'Euclide sur les nombres premiers

Il existe une infinité de nombres premiers

Conjecture sur les nombres premiers jumeaux:

Il existe une infinité de nombres premiers jumeaux

La preuve d'Euclide

Soit $\{p_1 ; p_2 ; \ldots\ldots\ p_n\}$ une liste de nombre premiers.

Aucun de ces nombres ne divise $p_n!+1$. Il existe donc un nombre premier $\boldsymbol{p}$ qui n'appartient pas à cette liste.

Une démonstration familière

Raisonnement par l'absurde :

Supposons qu'il existe un nombre fini de nombres premiers.

Soit pM le plus grand des nombres premiers,

$pM\,!+1 > pM$ n'est divisible par aucun nombre premier

⇒ **Contradiction** : il y a une infinité de nombres premiers.

Euclide et les nombres de Fermat

$$F_n = 2^{2^n} + 1$$

$$\prod_{k=0}^{n-1} F_k = F_n - 2$$

$m \mid Fk$ et $m \mid Fn \Rightarrow m \mid 2$

$$\forall i,j \text{ et } i \neq j : F_i \wedge F_j = 1$$

Hillel Furstenberg : une preuve topologique

$Na,b = \{a + nb : n \in \mathbb{Z}\}$; a ;$b \in \mathbb{Z}$ et $b > 0$

$[O \subseteq \mathbb{Z}$ ouvert$] \Leftrightarrow [O = \emptyset$ ou $\forall\, a \in O\ \exists b > 0 : Na,b \subseteq O\ ]$

(1): $\mathcal{O}$ non vide $\Rightarrow$ $\mathcal{O}$ infini
(2): $N_{a,b}$ ouvert par définition
(3): $N_{a,b}$ fermé $\quad N_{a,b} = \mathbb{Z} \setminus \bigcup_{i=1}^{b-1} N_{a+i;b}$

$$\mathbb{Z} \setminus \{1; -1\} = \bigcup_{p \in \mathbb{P}} N_{0;p}$$

$\mathbb{P}$ fini $\Rightarrow \bigcup_{p \in \mathbb{P}} N_{0;p}$ fermé $\Rightarrow \{1; -1\}$ ouvert

L’argument d’Euler

$$\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p}$$ diverge

Une preuve de Erdős

Par l'absurde : supposons que $\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p}$ converge :

$\exists n \sum_{k>n} \frac{1}{p_k}$

Soi $\cup B$

A : ensemble des nombres divisibles par au moins un p_{n+i}

B : le complémentaire de A dans $\{1;....;N\}$

Une preuve de Erdős

$$\mathrm{Card}(A) \leq \frac{N}{p_{n+1}} + \frac{N}{p_{n+2}} + \text{------} \leq N \times \sum_{k>n} \frac{1}{p_k} \leq \frac{N}{2}$$

$$\mathrm{Card}(B) \geq \frac{N}{2}$$

Soit $r \in B$ tq : $r = m^2 q$

q sans facteur premier carré : 2^n choix possibles

$m \leq \sqrt{r} \leq \sqrt{N}$

$$\frac{N}{2} \leq \mathrm{Card}(B) \leq 2^n \times \sqrt{N}$$

Viggo Brun et la conjecture des nombres premiers jumeaux

$$\sum_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p+2\in\mathbb{P}}} \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p+2}\right)$$ converge

Premier travail
Premières conclusions

<u>L'idée</u> :

Trouver une preuve de l'infinité des nombres premiers utilisant le théorème de Wilson

p premier si et seulement si : $(p-1)! + 1 \equiv 0\ [p]$

Trouver une caractérisation des nombres premiers jumeaux utilisant le théorème de Wilson

Premier travail
Premières conclusions

- Importance de la définition du sujet
- Phénomène de contrat
- Organisation du travail
- Processus d’autocontrôle

Reprise de l’étude

Une preuve de l’infinité de l’ensemble des nombres premiers à l’aide du théorème de Wilson

Reprise de l'étude

- **Raisonnement par l'absurde :**

On suppose $\mathbb{P}$ fini $\Rightarrow p_M$ le plus grand des nombres premiers.

On pose : $\mathbb{N}_M = \{n \in \mathbb{N}$ et $n > p_M\}$

On définit la fonction f :

$$f : \begin{cases} \mathbb{N}_M \to \mathbb{Q} \\ n \mapsto \dfrac{(n-1)!+1}{n} \end{cases}$$

f ne prend pas de valeur entière

Reprise de l'étude

Montrons que $n \wedge (n - 1)! + 1 = 1$

Soit $m \mid n$ et $m \mid (n - 1)! + 1$

$m < n$ sinon, d'après Wilson : n premier.

Donc : $m \mid (n - 1)!$

Et : $m \mid (n - 1)! + 1$ d'où $m \mid 1$ donc $m = 1$

Donc : $\forall\, n \in \mathbb{N}M$: $n \wedge (n - 1)! + 1 = 1$

$pM\,! \in \mathbb{N}M$ donc : $pM\,! \wedge (pM\,! - 1)! + 1 = 1$

Or $pM\,!$ est divisible par tous les nombres premiers ⇒ **Contradiction**

Reprise de l’étude

Une caractérisation des nombres premiers jumeaux grâce au théorème de Wilson

Reprise de l’étude

P.A. CLEMENT – Janvier 1949

Condition nécessaire et suffisante pour que deux entiers p et p+2 soient tous les deux premiers:

$$\mathbf{4((\,\boldsymbol{p} - 1)! + 1) + \boldsymbol{p} \equiv 0\ [\,\boldsymbol{p}\,(\boldsymbol{p}+2)]}$$

CONGRUENCES FOR SETS OF PRIMES

P. A. CLEMENT, University of California, Los Angeles

1. Introduction. Wilson's function $P_1(n)$ is the function $P_1(n) \equiv (n-1)!+1$. By Wilson's theorem the condition $P_1(n) \equiv 0 \bmod n$ is necessary and sufficient in order that an integer $n>1$ be prime. In this note we find a congruence condition, similar to the above, for twin primality, and we indicate a method which furnishes a condition for sets of prime numbers of any prescribed type.

2. Twin primes. We shall establish the following result:

THEOREM. *A necessary and sufficient condition that two integers, n and $n+2$, $n>1$, both be prime is that*

$$4[(n-1)!+1]+n \equiv 0 \bmod n(n+2). \tag{1}$$

Proof. The sufficiency is obvious as divisions by n and $n+2$ separately reduce either to Wilson's theorem or to a simple modification of it.

The necessity follows as easily, but we wish to indicate how (1) may be obtain directly. Thus, with n and $n+2$ both primes, we have

$$(n-1)!+1 \equiv 0 \bmod n, \tag{2}$$

$$(n+1)!+1 \equiv 0 \bmod (n+2). \tag{3}$$

PREV

NEXT

Reducing the factorial of (3) mod $(n+2)$ and rewriting as an equation we obtain

$$2[(n-1)!]+1=k(n+2), \qquad k \text{ some integer;} \tag{4}$$

then, using (2), we must have

$$2k+1\equiv 0 \bmod n. \tag{5}$$

Substitution of (5) in (4) determines the congruence of the theorem.

It may be noted that if 1 is considered the first prime, then the restriction $n>1$ can be deleted from the above theorem.

Théorème de P.A. CLEMENT : condition suffisante

Soit $\boldsymbol{p}$ un entier tel que $\boldsymbol{p}$ et $\boldsymbol{p}+2$ soient premiers.

$$\text{Wilson} \Rightarrow (p + 1)! + 1 \equiv 0 \; [\, p +2]$$

$$\Leftrightarrow p(p+1)(p -1)! + 1 \equiv 0 \; [\, p +2]$$

$$p(p+1) = p^2 + p \equiv p^2 + p + (p +2) \; [\, p +2]$$

$$\equiv p\,(p + 1 + 1) + 2 \; [\, p +2]$$

$$\equiv 2 \; [\, p +2]$$

Théorème de P.A. CLEMENT : condition suffisante

Donc :

$(p+1)!+1 \equiv 0\ [\ p+2] \Leftrightarrow 2(p-1\ )!+1 \equiv 0\ [\ p+2]$

D’où:

$2(p-1\ )!+1 = k\ (p+2)$

Et:

$$2(p-1\ )!+1 = \underbrace{(p-1\ )!+1}_{\equiv 0\ [p]} + \underbrace{(p-1\ )!}_{\equiv -1\ [p]} = \underbrace{2p}_{\equiv 0\ [p]} + 2k$$

Donc : $2\ k+1 \equiv 0\ [p]$

Théorème de P.A. Clement : condition suffisante

On a :

$4((p - 1)! + 1) + p =$

$2(p – 1)! + 1 + 2(p – 1)! + 1 + 2 + p =$

$2(2(p – 1)! + 1) + p + 2 =$

$\equiv 0\ [p(p + 2)]$

$\underbrace{2(k(p}_{\equiv 0\ [p]}\underbrace{+ 2)) +}_{\equiv 0\ [p + 2]} p + 2 =$

$(2k + 1)(p + 2)$

Théorème de P.A. CLEMENT : condition nécessaire

Soit ***n*** un entier tel :

$$\mathbf{4((\boldsymbol{n} - 1)! + 1) + \boldsymbol{n} \equiv 0\ [\ \boldsymbol{n}\ (\boldsymbol{n} + 2)]}$$

$4((n - 1)! + 1) = k\, n\, (n + 2) - n = n\, (k\, n\, (n + 2) - 1)$

Donc : $4((n - 1)! + 1) \equiv 0\ [n\ ]$

$(n - 1)! + 1$ impair et $2^4 \nmid 2^8$

$\Rightarrow$ Wilson : n est premier.

Théorème de P.A. Clement : condition nécessaire

$4((n - 1)! + 1) = k\,n\,(n+2) - n = n\,(k\,n\,(n+2) - 1)$

$4(n - 1)! = n\,(k\,n\,(n+2) - 1) - 4$

$4(n + 1)! = n^2\,(n + 1)(k\,(n+2) - 1) - 4n\,(n + 1)$

$4((n + 1)!+1) = n^2\,(n + 1)(k\,(n+2) - 1) - 4n\,(n + 1)+4$

$P(X) = X^2\,(X + 1)(k\,(X+2) - 1) - 4X\,(X + 1)+4$

$P(-2) = 0$

$4((n + 1)!+1) \equiv 0\ [n+2] \Rightarrow$ Wilson : $n + 2$ est premier.

WILSON - CLEMENT

Soit p^* le plus grand des nombres premiers tq : $p^* + 2$ non premier.
$\mathbb{P}^*$: ensemble des nombres premiers $> p^*$

$$f : \begin{cases} \mathbb{P}^* \to \mathbb{Q} \\ p \mapsto \frac{4\left((p-1)!+1\right)+p}{p(p+2)} \end{cases}$$

Wilson $\Rightarrow p \mid (p-1)! + 1$ donc $f(p) = \dfrac{\frac{4\left((p-1)!+1\right)}{p}+1}{p+2} = \dfrac{a_p}{b_p}$

Wilson - Clement

<u>Propriété</u> :

$$\forall p \in \mathbb{P}^* : (\ p + 2)\ \wedge (4\,\frac{(p-1)!+1}{p} + 1) = 1$$

	A	B	C	D
1	*p*	*p+2*	*Wilson-Clement*	*pgcd*
2	2	4	5	1
3	3	5	5	5
4	5	7	21	7
5	7	9	413	1
6	11	13	1319565	13
7	13	15	147385109	1
8	17	19	4,92301E+12	19
9	19	21	1,34787E+15	1
10	23	25	1,95478E+20	#NOMBRE!

Wilson - Clement

Lemme :

$$m \mid p+2 \Rightarrow m \mid \left(4\frac{(p-1)!+1}{p}\right)$$

F	G	H	I	J
Lemme	**$p+2$**	**m**	**m'**	**(Wilson-Clement - 1)/4**
	9	3		103
	15	3	5	36846277
	21	3	7	3,36967E+14

WILSON - CLEMENT

Soit $m \mid p + 2$ et $m < p + 2$

m est impair

$p \nmid m \Rightarrow m \mid 4(p - 1)! + 4 + p$

Or $m < p$ donc $m \mid 4(p - 1)!$

D'où : $m \mid 4 + p$

$$\left.\begin{array}{l} m \mid p + 4 \\ m \mid p + 2 \end{array}\right\} \Rightarrow m \mid (p+4) - (p+2) = 2$$

Or m est impair $\Rightarrow m = 1$

Conclusions

Sur l’activité effectuée :

- Définition du sujet
- Phénomène de contrat
- Organisation du travail
- Autocontrôle
- Gestion du temps

Conclusions

ESFI : Enseignement ordinaire en classe.

- Tâches complexes
- DI
- Classes Freinet
- Narrations de recherche
- SiRC
- Problèmes ouverts
- (PER)

Conclusions

Une activité mathématique à par entière :

la création d’exercices

- Résolutions de systèmes d’équations
- Développement/Factorisation de trinômes du second degré
- Concours de recrutement des enseignants

Conclusions

Formation initiale et continue des enseignants

- TER
- Hippocampe

Bibliographie

Introduction à la théorie des nombres

Godfrey Harold HARDY - Edward Maitland Wright

Exercices de théorie des nombres

Collectif D.P. PARENT

Epistémologie mathématique

Henri LOMBARDI

Preuves et réfutations

Imre LAKATOS

Théorème vivant

Cédric VILLANI

Merveilleux nombres premiers

Jean-Paul DELAHAYE

Les enseignants de sciences face aux démarches d’investigation

Ouvrage collectif