Violaine HUYSMANS Mai 2013

UE 3.4

Master 2 Didactique des mathématiques

Présentation du livre de George Lakoff et de Rafael E.Núñez

WHERE MATHEMATICS COMES FROM

How the embodied mind brings mathematics into being

451 pages, texte original en anglais, n'a pas été traduit en français.

D'où viennent les mathématiques,
Comment l'esprit incarné permet aux mathématiques d'être.

I Les auteurs

II Le but de cet ouvrage

III Présentation de l'ouvrage

A - Généralités sur les sciences cognitives selon Lakoff et Núñez

B – Plan de l'ouvrage

Partie I – L'incarnation de l'arithmétique de base

Partie II – Algèbre, logique et groupe

Partie III – L'incarnation de l'Infini

Partie IV – L'espace interdit et les déplacements : le programme de discrétisation qui donne la forme aux mathématiques modernes

Un paradoxe classique de l'infini

Partie V - Implications pour la philosophie des mathématiques

Partie VI – Une étude de cas de la structure cognitive en classe de mathématiques

IV Intérêt possible pour la didactique

I Les auteurs

George Lakoff, est professeur de linguistique cognitive à l'Université de Californie (Berkeley), où il enseigne depuis 1972. Bien qu'une partie de ses recherches concerne des questions linguistiques traditionnelles, telles que les conditions déterminant la viabilité grammaticale d'une construction linguistique particulière, il est surtout connu pour ses thèses sur la métaphore conceptuelle comme étant au cœur de la pensée humaine, du comportement politique et de la société.

Rafael E.Núñez est un professeur de science cognitive à l'université de Californie (San Diego)

II Le but de cet ouvrage

Les auteurs annoncent au départ que la question centrale de cette ouvrage est : '<u>Quelle est la structure cognitive des notions mathématiques 'sophistiquées' ?</u>' Au fur et à mesure de l'avancée de ce livre, nous nous rendons compte que plus précisément Lakoff et Nuñez <u>veulent vérifier que la théorie de la métaphore conceptuelle, mise au point par Lakoff, est vraie aussi pour les savoirs mathématiques.</u>

Pour eux, les mathématiques ne peuvent pas exister en dehors des concepts utilisés dans la vie courante. Faire des mathématiques fait appel aux capacités d'adaptation de nos mécanismes cognitifs.

Ceci les amène à réfuter l'idée platonicienne encore présente plus ou moins consciemment chez beaucoup de personnes. Par cette théorie 'incarnée' les mathématiques ne viennent pas d'un monde parfait, transcendantal qu'il nous faudrait découvrir au fur et à mesure de nos recherches mais d'une construction cognitive.

III Présentation de l'ouvrage

A - Généralités sur les sciences cognitives selon Lakoff et Núñez

i – Opérations cognitives

Ce qui nous parait très simple (parler, regarder, …) nécessite un nombre impressionnant d'opérations cognitives complexes. Pour pouvoir réaliser ces multitudes d'opérations cognitives nous avons une mémoire inconsciente.

Voici un exemple dans le domaine des mathématiques, sur des opérations cognitives que nous pouvons conscientiser mais auxquelles nous ne faisons plus attention.

Pour compter (au-delà de 4) nous devons mettre en œuvre les capacités suivantes :

- Grouper (être capable de repérer la caractéristique commune qui va permettre de créer un groupe)
- Ordonner (créer un ordre pour ne pas comptabiliser deux fois un même objet)
- Faire des paires (associer ses doigts aux objets ou les termes de la comptine numérique aux objets)
- Mémoriser (la comptine numérique, les éléments déjà comptabilisés)

- Détecter la fin
- Donner le dernier terme de la suite ordinale comme étant le cardinal recherché
- Réaliser que le résultat ne dépend pas de l'ordre choisi pour compter les éléments.

Ce livre ne parle pas des actions conscientes pour effectuer une preuve, un raisonnement mais des actions inconscientes en amont qui permettent de faire cela.

La difficulté réside dans notre difficulté à connaître ou à pouvoir décrire ce qui nous a permis telle ou telle opération mentale.

ii – étapes des opérations cognitives

' image schema' : image mentale et gestes mentaux qui proviennent directement de la réalité perçue par nos sens. (Cela ne dépend pas forcément de la vue, il a été observé chez des aveugles congénitaux de très bonnes images mentales.)

'conceptual metaphor' : La métaphore opère au niveau conceptuel, par projection automatique et inconsciente d'un domaine source concret vers un domaine cible abstrait, et projette sur ce dernier tout ou partie de la logique du domaine source, c'est-à-dire tout ou partie des inférences, des déductions, des conclusions, qu'il implique.

'conceptual blends': Mélange de plusieurs métaphores conceptuelles et d'ajouts de savoirs pour obtenir de nouveaux savoirs.

La métaphore longtemps considérée comme une figure de style a récemment été perçue comme le processus central de la pensée. C'est le moyen basique par lequel l'abstraction se fait.

George Lakoff et Mark Johnson (1980) ont émis l'hypothèse que la métaphore est un processus mental continuel, habituel et régulier, qui permet de raisonner et de comprendre. Comme par exemple la métaphore du concept de chaleur appliqué à la relation humaine (Il a reçu un accueil chaleureux ; la conversation était glaciale, il a été très froid, cela m'a fait chaud au cœur, …).

Pour cette étude mathématique les auteurs nous précise deux types de métaphores :

- grounding metaphor'

  De l'expérience concrète (comme empiler des objets) au concept abstrait (l'addition)

- 'linking metaphore'

  Qui établit un lien, une projection, entre deux 'savoirs'.

Toutes ces capacités cognitives (de créer des images mentales, faire des métaphores, …) étant innées à la personne humaine.

B – Plan de l'ouvrage

Point de départ : une capacité innée

Nous avons une habilité, que nous n'apprenons pas, à distinguer les petites quantités et à additionner ou soustraire de petites quantités (jusqu'à 4). Des expériences (Wynn, 1992) ont montré que ces capacités étaient présentes dès les premiers mois de la vie des nourrissons.

Ceci a même été étudié chez certaines espèces animales comme les chimpanzés.

Il est à noter aussi que de nombreuses études effectuées sur des patients ayant des lésions cérébrales (Dehaene, 1997) ont montré que le calcul algrébrique et le calcul arithmétique ne s'effectuait pas dans les mêmes parties du cerveau. Que les capacités à faire de l'arithmétique basique étaient séparées des capacités de mémorisations répétitives des tables d'addition et de multiplication (par exemple un patient qui est capable de nommer un 5, de répondre par cœur à 9x3, de dire ce qu'il y a entre le A et le C , mardi et jeudi, n' était pas de dire ce qu'il y a entre le 3 et le 5, de dire ce que donnait 2-1)

Dans tout le livre les auteurs tentent de monter comment les savoirs ont pu être construits dans le cerveau humain. De manière cognitive et non épistémologique ! Il serait trop long d'exposer tous ces liens mais voilà quelques points d'attention intéressants :

Partie I – L'incarnation de l'arithmétique de base

Ce chapitre montre comment à partir de ces capacités innées, le cerveau construit ses savoirs arithmétiques simples. Pour comprendre comment les auteurs fonctionnent pour expliciter les métaphores tout le long de l'ouvrage voici les schémas des quatre métaphores de réalités concrètes qui construisent l'arithmétique.

Ce sont des exemples de 'grounding metaphor' : les collections d'objets, les empilements d'objets, les mesures des objets par une unité de longueur, les déplacements suivant un chemin.

ARITHMETIC IS OBJECT COLLECTION

Source Domain OBJECT COLLECTION		*Target Domain* ARITHMETIC
Collections of objects of the same size	→	Numbers
The size of the collection	→	The size of the number
Bigger	→	Greater
Smaller	→	Less
The smallest collection	→	The unit (One)
Putting collections together	→	Addition
Taking a smaller collection from a larger collection	→	Subtraction

ARITHMETIC IS OBJECT CONSTRUCTION

Source Domain OBJECT CONSTRUCTION		*Target Domain* ARITHMETIC
Objects (consisting of ultimate parts of unit size)	→	Numbers
The smallest whole object	→	The unit (one)
The size of the object	→	The size of the number
Bigger	→	Greater
Smaller	→	Less
Acts of object construction	→	Arithmetic operations
A constructed object	→	The result of an arithmetic operation

The Measuring Stick Metaphor

Source Domain The Use of a Measuring Stick		Target Domain Arithmetic
Physical segments (consisting of ultimate parts of unit length)	→	Numbers
The basic physical segment	→	One
The length of the physical segment	→	The size of the number
Longer	→	Greater
Shorter	→	Less
Acts of physical segment placement	→	Arithmetic operations
A physical segment	→	The result of an arithmetic operation

Arithmetic Is Motion Along a Path

Source Domain Motion Along a Path		Target Domain Arithmetic
Acts of moving along the path	→	Arithmetic operations
A point-location on the path	→	The result of an arithmetic operation
The origin, the beginning of the path	→	Zero
Point-locations on a path	→	Numbers
The unit location, a point-location distinct from the origin	→	One
Further from the origin than	→	Greater than
Closer to the origin than	→	Less than
Moving from a point-location *A* away from the origin, a distance that is the same as the distance from the origin to a point-location *B*	→	Addition of *B* to *A*

Partie II – Algèbre, logique et groupe

Ce qui est intéressant à noter est que les auteurs pensent que le passage de l'arithmétique à l'algèbre fonctionne comme notre système de pronoms dans le langage.

Un chapitre entier est consacré à Boole (conscients des projections effectuées), en donnant à son travail le terme de 'métaphore de Boole'. Voici deux exemples de 'linking metaphor' correspondant à ce travail :

Boole's First-Stage Metaphor

Source Domain Arithmetic		Target Domain Classes
Numbers	→	Classes
Addition	→	Union, symbolized by '∪'
Multiplication	→	Intersection, symbolized by '∩'
Commutative law for addition	→	Commutative law for union
Commutative law for multiplication	→	Commutative law for intersection
Associative law for addition	→	Associative law for union
Associative law for multiplication	→	Associative law for intersection
Distributive law for multiplication over addition	→	Distributive law for intersection over union
0	→	The empty class, symbolized by Ø
1	→	The universal class, symbolized by *I*
Identity for addition: 0	→	Identity for union: Ø
Identity for multiplication: 1	→	Identity for intersection: *I*
$A + 0 = A$	→	$A \cup \varnothing = A$
$A \cdot 1 = A$	→	$A \cap I = A$
$A \cdot 0 = 0$	→	$A \cap \varnothing = \varnothing$

Boole's Metaphor

Source Domain Algebra		Target Domain Classes
Abstract elements	→	Classes
An abstract operation ⊕	→	Union, symbolized by ∪
An abstract operation ⊗	→	Intersection, symbolized by ∩
Commutative law for ⊕	→	Commutative law for union
Commutative law for ⊗	→	Commutative law for intersection
Associative law for ⊕	→	Associative law for union
Associative law for ⊗	→	Associative law for intersection
Distributive laws for ⊗ and ⊕	→	Distributive laws for intersection and union
0	→	The empty class, symbolized by Ø
1	→	The universal class, symbolized by *I*
Identity for ⊕: 0	→	Identity for union: Ø
Identity for ⊗: 1	→	Identity for intersection: *I*
$A \oplus 0 = A$	→	$A \cup \varnothing = A$
$A \otimes 1 = A$	→	$A \cap I = A$
$A \otimes 0 = 0$	→	$A \cap \varnothing = \varnothing$
A unary abstract operator ~, such that $A \oplus {\sim}A = 1$ and $A \otimes {\sim}A = 0$	→	Complement of *A*: *A'* such that $A \cup A' = I$ and $A \cap A' = \varnothing$
Closure for ⊕, ⊗, and ~	→	Closure for ∪, ∩, and '

Partie III – L'incarnation de l'Infini

Au premier abord les auteurs précisent que l'on pourrait croire qu'il n'y a rien de plus éloigné de l'incarnation que l'infini. Or ils montrent qu'il n'en est rien. Le concept général d'infini qui n'est pas propre aux mathématiques prendrait sa source dans l'incarnation de l''aspectual system', terme en science cognitive qui caractérise la structure des événements.

Certaines actions sont, en soi, continues, certaines ont en soi des départs et des arrivées, comme sauter. Certaines ont juste un point de départ, comme partir, d'autres juste un point final comme arriver. Certaines actions ont leur achèvement compris dans une action (atterrir est une partie de

sauter) et d'autres ont leur achèvement à l'extérieur de l'action (en général atterrir ne fait pas partie de l'action de voler).
Mais des actions comme celle de respirer par exemple n'ont pas d'achèvement. Cela se nomme, pour cet aspectual system, *un aspect imparfait.*
Ce système est incarné dans notre contrôle moteur du cerveau. (Narayanan, 1997, a montré que l'arborescence de la structure de l''aspectual system' était identique à ce qu'on trouve dans le contrôle moteur du cerveau.)
En dehors des mathématiques, un processus est vu comme infini s'il est continue (ou itéré) indéfiniment sans arrêt. C'est-à-dire qu'il a un aspect imparfait sans point final. Cela est utilisé dès que quelque chose est en mouvement perpétuel.
Ce type d'infini qui est appelé 'l'infini potentiel' par Aristote se distingue de l'infini actuel où l'infini est conceptualisé par une réalité en soi.
Les auteurs font alors l'hypothèse que cet infini actuel est une métaphore de l'infini vu précédemment. Que le mécanisme de la métaphore nous autorise à former un résultat d'un processus infini.
Cette métaphore est appelée la BMI – Basic Metaphor of Infinity.

Elle apparait nécessaire pour que beaucoup de notions mathématiques, qu'ils détaillent dans ces parties, puissent être intégrés dans notre esprit.

Partie IV – L'espace interdit et les déplacements : le programme de discrétisation qui donne la forme aux mathématiques modernes

Dans cette partie aussi, les auteurs montrent qu'avec la base de la BMI tout est construit par métaphore.

Un paradoxe classique de l'infini

Les auteurs veulent montrer par l'étude d'un paradoxe que le choix de la métaphore utilisée pour comprendre un problème n'est pas sans conséquence. Que souvent les mathématiques proposent des métaphores conceptuelles alternatives et qu'il faut s'en servir.

Partie V - Implications pour la philosophie des mathématiques

Comme nous l'avons vu plus haut, les auteurs argumentent contre Platon, contre ce qu'ils appellent la romance mathématique, pour soutenir que les mathématiques n'existent pas en dehors de l'esprit humain. Il y oppose la théorie des mathématiques incarnées qu'ils ont développée tout au long de l'ouvrage.

Ils montrent les difficultés à s'entendre sur les notions de point, de vérité, d'égalité, …

Ils dressent un portrait des mathématiques :

- Une partie naturelle de notre être. Toute culture a une forme de mathématique
- Il n'y a rien de mystérieux, de magique ou mystique dans les mathématiques
- C'est une des plus grandes productions de l'imagination collective de l'humanité
- C'est un système de concepts qui fait un extraordinaire usage des outils de la pensée humaine
- C'est une forme de perception et conceptualisation du monde

- Tout en mathématique est compréhensible
- Toutes les formes d'intelligences sont nécessaires. Pas une qui serait supérieur aux autres
- Les mathématiques sont appelés à grandir
- Les mathématiques ne sont pas figées par une forme de concept
- Les mathématiques sont un exemple de la beauté, de la richesse, de la complexité des capacités humaines. C'est un testament de l'Humanité qui travaille ensemble
- L'homme est responsable de la création des mathématiques

Partie VI – Une étude de cas de la structure cognitive de Mathématiques classiques

Par l'étude de cas $e^{\pi i}+1$, les auteurs montrent comment ce principe des métaphores conceptuelles permet de tout construire. Un point important qu'il souligne est la liaison des différentes branches mathématiques en précisant que c'est loin d'être accidentel.

IV Intérêt possible pour les mathématiques et la didactique

Il ne semble pas du tout nécessaire à un mathématicien de comprendre comment ses liens du cerveau fonctionne pour l'aider à mieux faire son travail de chercheur. Comme les recherches sur le fonctionnement cognitif du langage qui ne nous donnent pas de pistes pour écrire de nouveaux romans.

Au niveau de la didactique il paraît intéressant de comprendre de manière générale comment fonctionne notre cerveau. Vu comme tel, il incite à la multiplication d'images mentales, de gestes mentaux, de fonctionnements en prise avec les différentes réalités sur lesquelles s'applique notre construction mathématique. Trop souvent nos savoirs expérimentés nous aveuglent sur des capacités que nous avons construites, sur des connexions que nous avons faites, consciemment ou non. Nous oublions que les liens créés par notre cerveau ne sont pas si évidents que cela. 13 est différent dans une certaine mesure de 'treize', de 10 + 3, de 20-7, de • • • • • • • • • • • • •

Dans l'enseignement il parait important d'aider de manière plus explicite, à la création des liens cognitifs que certains font de manière inconsciente.

L'argument philosophique sur la provenance des mathématiques, argumenté par la théorie des mathématiques incarnés, reste tout de même l'argument principal : si les mathématiques sont des savoirs constructibles, alors tout être humain normalement constitué a la capacité de faire des mathématiques !