Master Enseignement & Formation en Mathématiques
Année 2012 - 2013
Aix-Marseille Université

EVALUATION DE L'UE34 ***ACTUALITES DE LA RECHERCHE EN MATHEMATIQUES***
Preuves et réfutations, Imre Lakatos

Karine Drousset
Céline Giordano

Sommaire

EVALUATION DE L'UE34 *ACTUALITES DE LA RECHERCHE EN MATHEMATIQUES*

Nous proposons un compte rendu de notre lecture du livre :

PREUVES et REFUTATIONS, Essai sur la logique de la découverte mathématique, par Imre Lakatos (1984), Hermann, Editeurs des sciences et des arts. Traduction par N. Balacheff et J-M. Laborde

I. Présentation de l'ouvrage

Lakatos (1922-1974) est un logicien et épistémologue hongrois, philosophe des mathématiques et des sciences. Il a soutenu sa thèse en 1961 puis, a écrit ce livre en 1963-1964.

Dans l'introduction à l'édition Française, N. Balacheff et J-M Laborde, didacticiens, soulignent que cet ouvrage est un « *essai sur la recherche de la vérité en mathématique, c'est-à-dire en fait un essai sur le rôle de l'erreur dans le développement de ce domaine de connaissance.* » (p.XIII)
Lakatos montre que l'erreur a un rôle essentiel dans le développement des connaissances mathématiques. Il propose d'étendre aux mathématiques la conception faillibiliste des sciences (aucune connaissance n'est à l'abri d'une révision future).

Balacheff et Laborde mettent en évidence que :« *La tentative de Lakatos pour une modélisation de la découverte mathématique apporte une vision revigorante et renouvelle l'enthousiasme des chercheurs qui avancent en se trompant, qui s'engagent dans des voies sans issue, qui ne savent même pas ce qu'ils veulent démontrer. A la recherche de P que de sa négation, ils manient simultanément les exemples et les contre-exemples, les preuves et les réfutations.* » (p.XV)

Ainsi, une dimension importante que l'on peut attribuer à cet ouvrage est celle d'être l'exposé « *d'une épistémologie nouvelle de la preuve en mathématiques.* » (pXVIII)

Pour donner forme à cet essai, Lakatos écrit un dialogue fictif entre plusieurs élèves et un maître pour illustrer, à partir de la conjecture d'Euler, comment peuvent se développer les connaissances mathématiques. En partant d'une conjecture qualifiée de « naïve », il présente, dans un premier temps, trois méthodes principales de formation de théorèmes. Puis, il s'interroge sur le type de raisonnement qui fonde la création des mathématiques.

II. L'origine de la relation d'Euler

Euler, mathématicien suisse du 18ème siècle (1707-1783) recherchait une classification des polyèdres convexes. S'inspirant du classement des polygones en fonction du nombre de côtés, il choisit comme critère le nombre de faces. Puis, obtenant dans une sous-famille, des polyèdres qui ne se ressemblent pas (ceux qui ne sont ni du type prisme, ni du type pyramide), il affine la classification des polyèdres ayant le même nombre de faces, avec un deuxième critère : le nombre de sommets ; et enfin, un troisième: le nombre d'arêtes.
Il constate alors, qu'à nombre de faces et nombre de sommets donnés, le nombre d'arêtes est invariant.

La conjecture d'Euler
Pour tout polyèdre convexe, F+S-A = 2, où F est le nombre de faces, S le nombre de sommets et A le nombre d'arêtes.

III. Raisons d'être de l'étude de Lakatos

Dans son introduction, Lakatos définit son projet comme l'étude de « *la thèse suivant laquelle les mathématiques non formelles, quasi empiriques ne se développent pas dans un accroissement continu du nombre de théorèmes indubitablement établis, mais dans l'amélioration incessante des conjectures à la spéculation et à la critique, grâce à la logique des preuves et réfutations*. »

Les didacticiens, Balacheff et Laborde, ont précisé que sa tentative de modélisation de la découverte mathématique a conduit à montrer que :
« *le travail du mathématicien est ainsi une théorisation de la mathématique elle-même, une rectification des concepts…* ». (pXVII)

Pourquoi Lakatos a-t-il choisi la conjecture d'Euler pour écrire cet ouvrage ?
Dans leur livre *L'expérience mathématique*, Davis et Hersh (1983) ont écrit que Polya le lui aurait suggéré.
Nous pouvons aussi supposer que ce choix repose sur deux faits :
- le processus de cette preuve est riche en rebondissements,
- la géométrie occupait une place importante dans les mathématiques.

Pour quelles raisons Lakatos a-t-il choisi de rendre compte de son étude sous forme d'un dialogue ?
Ce dialogue se déroule dans une classe imaginaire entre plusieurs élèves qui représentent différents courants de pensée. A travers les propos de certains élèves, Lakatos citent des mathématiciens.

Nous faisons l'hypothèse que Lakatos souhaite montrer que la constitution d'un savoir mathématique dépend de la communauté scientifique dans lequel il a émergé, qu'une preuve s'élabore au sein d'une communauté. Selon lui, s'il n'y a pas de société, ni de culture, il n'y a pas de mathématiques.

IV. Résumé de l'ouvrage

Point de départ: une conjecture naïve
Pour un polyèdre quelconque S-A+F=2, où F est le nombre de faces, S le nombre de sommets et A le nombre d'arêtes.

Méthodes de formation de théorèmes :

- la relégation de monstres
- la relégation d'exceptions
- la méthode des preuves et réfutations

Point d'arrivée : des théorèmes différents sont obtenus :
Théorème 1 : tout polyèdre de Cauchy est eulérien.
Théorème 2 : tout polyèdre de Gergonne est eulérien
Théorème 3 : tout polyèdre de Legendre est eulérien

Définitions

- un **polyèdre de Cauchy** : polyèdre pour lequel on peut réaliser l'expérience mentale 1 décrite ci-dessous.

- un **polyèdre de Gergonne** : polyèdre qui possède au moins une face d'où l'on puisse en photographier tout l'intérieur, selon l'idée du mathématicien Gergonne (polyèdre quasi convexe).

- un **polyèdre de Legendre** : polyèdre dont on peut réaliser la carte sur une sphère le contenant selon une projection centrale (polyèdre presque convexe).

Expérience mentale : Selon l'idée de Cauchy, le maître débute le raisonnement par une expérience mentale en trois étapes. Il s'agit de se ramener à un cas connu, un polygone particulier, d'utiliser la triangulation, tout polygone pouvant se décomposer en un triangle.
Soit un polyèdre creux :
- Mettre à plat le polyèdre en découpant l'une de ses faces (figure 1);
S et A ne sont pas modifiés.
Donc (S-A+F=1 dans le graphe) équivaut à (S-A+F=2 pour le polyèdre initial).
- Triangulariser la carte (figure 2): tracer une diagonale dans chacune des faces polygonales ;
à chaque diagonale, on augmente ainsi de 1 unité à la fois A et F ; donc la valeur de S-A+F inchangée.
- Enlever un à un les triangles du graphe triangulé (figure 3); deux façons :
* enlever un côté du triangle ; alors une face et une arête disparaissent simultanément,
* enlever deux côtés et un sommet ; alors une face, deux côtés et un sommet dis
A la
Pou
Do

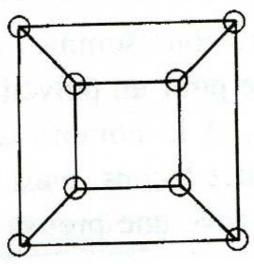


Figure 1

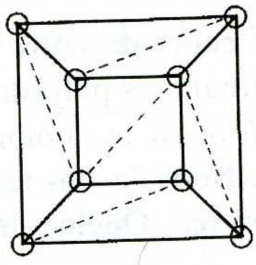
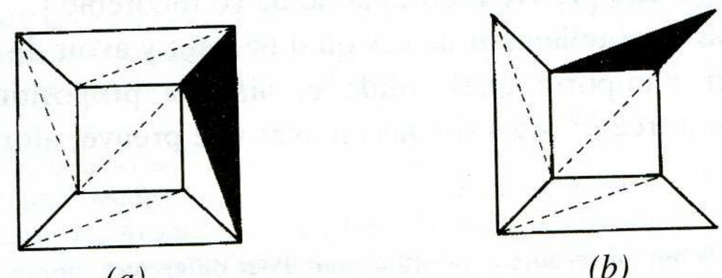


Figure 2



(a) (b)

Figure 3

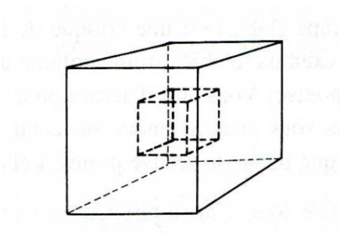
Cette expérience mentale est **une preuve** : selon le maître, il s'agit d'une décomposition de la conjecture originale en sous-conjectures ou lemmes :

Lemme 1 : Un polyèdre quelconque dont on a retiré une face peut être mis à plat.
Lemme2 : En triangulant la carte, on obtient toujours une nouvelle face à chaque nouvelle arête.
Lemme 3 : Dans la carte d'un polyèdre quelconque, on peut numéroter les triangles de telle façon que tout au long de leur retrait, dans l'ordre correspondant, S-A+F ne soit pas modifié.

Une preuve ne démontre pas nécessairement l'énoncé d'origine, mais en permet une analyse. Ainsi, Lakatos s'oppose à l'ordre Définition/Théorème/Preuve, bâti en fonction du résultat prouvé.

IV.1 La relégation de monstres

A partir de cette expérience mentale ou preuve, les débats commencent.
Selon Delta, la conjecture naïve est vraie. Il représente le courant dogmatique : pour lui, une preuve doit démontrer la validité de la conjecture, selon la tradition grecque.
Par contre, Alpha construit des contre-exemples pour invalider l'énoncé. Face à chaque contre-exemple, Delta redéfinit les concepts.

Contre-exemples	**Redéfinition des concepts**
Cubes emboités  *Figure 5*	Un **polyèdre** est une surface constituée d'un système de polygones. Ainsi, les cubes emboités ne forment pas un polyèdre car il y a deux systèmes de polygones.
Tétraèdres siamois (une arête commune ou un sommet commun)	Un **polyèdre** est un système de polygones tel que : (1) deux polygones et deux seulement sont adjacents à chaque arête

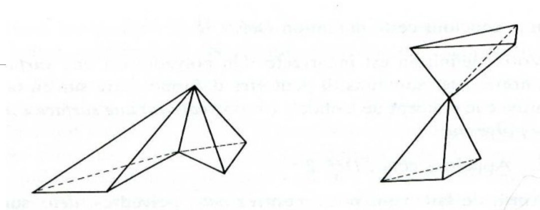
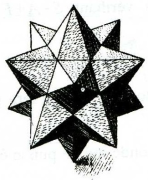
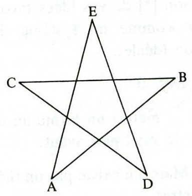
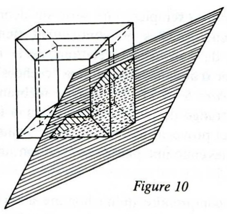


Figure 6

	(2) il est possible d'aller de l'intérieur d'un polygone à l'intérieur de n'importe quel autre par un chemin qui ne coupe jamais une arête en un sommet.
Polyèdre étoilé « le hérisson »  Figure 7. Polyèdre étoilé de Kepler.  Figure 8	Reprendre la définition précédente en précisant le concept de polygone. Un **polygone** est un système d'arêtes arrangées de telle façon que : (1) deux arêtes et deux seulement sont adjacentes à chaque sommet (2) les arêtes n'ont pas de points communs en dehors des sommets
Cadre  Figure 10	Un **polyèdre** : par n'importe quel point pris dans l'espace, il passe au moins un plan dont l'intersection avec le polyèdre est constituée d'un seul polygone. Vrai pour polyèdre convexe, mais pour un polyèdre concave, par certains points de l'espace, il passe un plan qui aura pour intersection plusieurs polygones.
Cylindre	Une **arête** a deux sommets.

Le maître montre ainsi qu'apporter une preuve permet de relancer un examen critique de la conjecture. Il définit alors ce qu'il appelle un contre-exemple local et un contre exemple global :
- un **contre-exemple local** réfute un lemme.
- un **contre-exemple global** réfute la conjecture principale.

Ainsi, Lakatos met en évidence une dialectique entre contre-exemples et définitions.
Les réfutationistes, représentés par Alpha, ont étendu le concept de polyèdre en donnant des contre-exemples. Notre système de référence des polyèdres s'élargit: nous sommes victimes de l'illusion heuristique que la relégation de monstres restreint les concepts alors qu'en fait elle les laisse invariants : Delta a toujours défini le même concept en changeant de termes.

Davis et Hersh (1983) soulignent: "*Each step of the proof is itself subject to criticism, which may be mere skepticism or may be the production of a counterexample to a particular argument. A counter example which challenges one step in the argument is called by Lakatos a "local counterexample"; a counter example which challenges, not the argument, but the conclusion it-self, he calls a global counterexample*." (p.347)

Ainsi, une démonstration relève d'une expérience « de pensée » qui conduit à distinguer des sous-conjectures, des lemmes. Ensuite des contre-exemples sont

découverts. Ils réfutent soit la conjecture elle-même (contre exemples globaux) soit un des lemmes (contre exemples locaux).
La conjecture ou les lemmes sont ainsi amenés à être modifiés et, le processus dialectique de la démonstration et réfutations peut, éventuellement, reprendre.

IV.2 La relégation d'exceptions

Bêta restreint le domaine de validité de la conjecture naïve en donnant un autre statut aux contre-exemples : ce ne sont plus des monstres mais des exceptions. Il nomme sa méthode « méthode de relégations des exceptions ». Son objectif est alors de déterminer avec précision le domaine dans lequel la conjecture d'Euler est valable.

Pour tout polyèdre qui n'a ni cavités (comme cubes emboités) ni tunnels (comme cadre) ni structure multiple (comme tétraèdre siamois) S-A+F=2.

Mais le maître avance une objection : ce dernier énoncé n'est pas valable car il élimine les exceptions au fur et à mesure de leur apparition. Comment savoir si la liste des exceptions est exhaustive ? Bêta répond par le théorème : Tous les polyèdres convexes sont eulériens. Mais certains polyèdres vérifient peut-être la relation mais ont été exclus. De plus, le maître objecte que dans son argumentation, la preuve est oubliée.

IV.3 La méthode d'incorporation des lemmes

Le maître incorpore chaque lemme à la conjecture initiale ; ces lemmes deviennent des conditions de l'énoncé initial. Ainsi, la conjecture, augmentée de conditions, est vraie d'après la preuve. Celle-ci devient une démonstration : elle prouve l'énoncé. Le théorème sera issu de la preuve.

Théorème : tout polyèdre simple (qui peut être mis à plat) à faces simplement connexes est eulérien.

Le maître affirme : « *Notre méthode éprouve en prouvant. L'unité intrinsèque de 'la logique de la découverte' et de la 'logique de la justification' constitue l'aspect le plus important de la méthode d'incorporation de lemmes ».* (p.47)
« Le but réel d'un 'problème de preuve' doit être d'améliorer (en fait, de parfaire) la conjecture naïve d'origine pour en faire un authentique théorème. » (p.52)
« La méthode d'incorporation de lemmes s'appuie sur l'argument (c'est-à-dire sur la preuve) et sur rien d'autre. En quelque sorte elle résume la preuve dans le théorème augmenté de lemmes. » (p.53)

IV.4 Règles de la méthode des preuves et réfutations

Le maître et les élèves généralisent la méthode des preuves et réfutations. Quatre premières règles émergent :

R1 : Pour une conjecture donnée, débuter sa preuve et sa réfutation ; en examinant la preuve, préparer une liste de lemmes, c'est-à-dire en faire la preuve-analytique; trouver des contre-exemples globaux et locaux. (p.63)
R2 : Si le contre-exemple est global, alors écarter la conjecture ; ajouter à la preuve analytique un lemme convenable, réfuté par le contre-exemple ; on obtient alors une version améliorée de la conjecture avec un lemme incorporé

sous forme de condition; ne pas écarter une réfutation comme un monstre ; expliciter tous les lemmes cachés. (p.63)
R3 : Si le contre-exemple est local, vérifier s'il est aussi global et dans ce cas, se reporter à R2. (p.63)
R4 : Si le contre-exemple est local et non global alors les conditions de la conjecture sont trop fortes ; améliorer la preuve analytique en remplaçant le lemme réfuté par un autre qui ne le soit pas. (p.73)

IV.5 Les fondements de la méthode des preuves et réfutations

Lakatos explicite les places que peuvent prendre les raisonnements inductif et déductif dans un processus de preuve.

IV.5.a L'induction

Bêta défend la thèse de l'induction : il propose de « *compléter les données avec les polyèdres non eulériens pour trouver une nouvelle formule puis l'améliorer en appliquant à nouveau la méthode des preuves et réfutations ».*
D'après lui, toute méthode déductive a un fondement inductif.

Mais Sigma s'oppose à l'induction à cause des monstres : comment obtenir une formule à partir du chaos ? Seuls des accidents historiques conduisent à des conjectures inductives naïves selon lui.

IV.5.b La déduction

Zêta affirme avoir besoin d'une idée pour commencer et non pas de données.
« Un problème ne tombe jamais du ciel. Il est toujours lié aux connaissances que nous avons déjà. » (p.89)

Le maître explique que les conjectures naïves ne sont pas inductives. Il s'oppose au mythe de l'induction en rappelant le deuxième choix heuristique : la spéculation déductive, c'est-à-dire la production de résultats mathématiques par la déduction.
« *Ainsi enfermé dans l'idée que la découverte chemine des faits à la conjecture et de la conjecture à la preuve (mythe de l'induction), il se peut que vous oubliiez complètement l'autre choix heuristique : la spéculation déductive.* » (p. 94)

Le discours du maître reprend celui de Polya qui s'est attaché à souligner les ressemblances entre heuristique scientifique et heuristique mathématique.

« *Heuristique mathématique et heuristique scientifique sont très semblables, non parce qu'elles sont toutes deux inductives, mais parce que toutes deux se caractérisent par la mise en œuvre de conjectures, de preuves et de réfutations.* » (p. 94)

La méthode des preuves et réfutations conduit à remplacer « *les concepts naïfs cruciaux* » (ici, la notion de polyèdre) par des concepts que Lakatos désigne par « *proof-generated concept* ».
C'est ainsi que Lakatos apporte une légitimité aux découvertes des mathématiciens qui s'écartent des conjectures initiales.
« *Après Christophe Colomb, on ne devrait plus être surpris de ne pas résoudre le problème tel que l'on s'était posé.* » (p. 115)

Ainsi, une cinquième règle est ajoutée à la généralisation de la méthode des preuves et réfutations.
R 5: en présence de contre-exemples, essayer de trouver par une spéculation déductive un théorème plus profond pour lequel ce ne sont plus des contre-exemples**.**

De plus, « *l'heuristique porte sur la dynamique du langage.* »(p.119)
« *Au fur et à mesure que la connaissance se développe, le langage évolue.* » (p. 118)
« *Toute période de création est en même temps une période où le langage se modifie.* » (Félix, 1957)

IV.6 Conclusion

Nous conclurons cette synthèse par deux citations .
« *Prouver n'est qu'une étape dans l'activité du mathématicien qui doit se poursuivre par l'élaboration de la preuve-analytique et des réfutations, et se conclure par le théorème rigoureux.* » (Lambda, p.67)
« *Une recherche scientifique commence et finit par des problèmes* » (le maître, p.133)

Davis et Hersh (1983) ont résumé :
« *Proofs and Refutations uses history as the text on which to base its sermon: mathematics, too, like the natural sciences, is fallible, not indubitable; it too grows by the criticism and correction of theories which are never entirely free of am-biguity or the possibility of error or oversight. Starting from a problem or a conjecture, there is a simultaneous search for proofs and counterexamples. New proofs explain old counterexamples, new counterexamples under-mine old proofs. To Lakatos, "proof" in this context of informal mathematics does not mean a mechanical procedure which carries truth in an unbreakable chain from assumptions to conclusions. Rather, it means explanations, justifications, elaborations which make the conjecture more plausible, more convincing, while it is being made more detailed and accurate under the pressure of counter examples*." (p. 347)

V. Apports de la relation d'Euler

V.1 Un théorème

La relation d'Euler a permis de justifier des théorèmes importants propres aux polyèdres convexes.
Par exemple, nous pouvons citer le théorème suivant.

Théorème : Dans tout polyèdre convexe, la somme des angles de toutes les faces est égale à
2x180°x (A-F).

La démonstration s'appuie sur la proposition suivante.
Proposition : Pour tout polygone convexe de n côtés, la somme des angles intérieurs est égale à : (n-2) x 180°.
Commençons par démontrer cette proposition par récurrence.
Pour n=3, on sait que la somme des angles d'un triangle est 180°.
Pour tout n supérieur à 3, si la proposition est vraie pour un polygone convexe de n côtés, démontrons la pour un polygone de n+1 côtés.
On choisit un sommet.
On considère un polyèdre convexe avec f faces.
Chaque face est un polygone convexe de ni côtés, i compris entre 1 et f.
La somme des angles de toutes les faces est égale à : $\sum_{i=1}^{f}(ni-2)*180°$= 180° $\sum_{i=1}^{f} ni$ -2xfx180°.
Or, on peut démontrer que : $\sum_{i=1}^{f} ni$ = 2 A,
soit par un raisonnement par récurrence,
soit en remarquant que : une arête bordant exactement deux faces, calculer cette somme revient à compter deux fois chaque arête.

Donc, $\sum_{i=1}^{f}(ni-2)*180°$ = = 180° x2A -2fx180° = 360°x (A-f)

V.2 <u>Un problème impossible</u>

La relation d'Euler permet aussi de justifier que le problème suivant est impossible.

Dans un pays donné, on désire réorganiser les voies de communications de façon à relier entre elles les 11 plus grandes villes. Elles doivent être reliées deux à deux soit par un canal, soit par un chemin de fer. Or les ingénieurs du pays, s'ils savent parfaitement faire passer une voie ferrée au-dessus d'un canal, ne savent pas faire passer une voie ferrée au-dessus d'une autre, ni un canal au-dessus d'un autre !
Peut-on les aider, et leur proposer un tracé ? (On pourra placer les villes comme on le désire).

On trouvera la démonstration de ce résultat dans un texte disponible, le 14/03/2013, à l'adresse : http://www.math.ens.fr/culturemath/maths/pdf/combi/planaire.pdf.

La recherche de cette preuve amène à déterminer un critère permettant de reconnaître qu'un graphe est planaire. On considère le graphe planaire, construit à partir de celui formé par les 11 villes (représentant chacune un sommet) et 55 arêtes (représentant soit les canaux soit les voies ferrées). Un tel critère avec la formule d'Euler appliqués au graphe planaire, conduit à une contradiction : le graphe ainsi construit ne peut pas être planaire. Donc quelque soit le tracé, se croiseront deux canaux ou deux voies ferrées.

<u>VI. Une proposition d'enseignement dans une classe</u>

Nous nous appuyons sur la position que prend Maggy Schneider vis-à-vis de l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, et qu'elle décrit dans un texte intitulé : INGENIERIES DIDACTIQUES ET SITUATIONS FONDAMENTALES : QUEL NIVEAU PRAXEOLOGIQUE ?
Elle commence par décrire ses présupposés sur les mathématiques, leur apprentissage et leur enseignement. C'est l'épistémologie socioconstructiviste selon laquelle les savoirs et les théories sont des réponses à des projets humains, qui lui a servi « *de bagage théorique minimal pour amorcer une réflexion sur les phénomènes d'apprentissage et d'enseignement.* »(p.176)
« *L'exposé déductiviste commence par une liste d'axiomes, de définitions et gomme les raisons de leur choix et de leur formulation. Il laisse peu de place au travail d'analyse inhérent à toute élaboration de preuve. Au contraire, le style heuristique met l'accent, d'après Lakatos, sur une dialectique entre preuves et réfutations, montrant comment se forgent les définitions pour donner prise au raisonnement déductif. Vu plus globalement, le discours heuristique met en évidence le projet initial à l'origine des mathématiques enseignées, quel que soit le niveau d'étude mathématique envisagé, les tentatives a priori, les succès et les échecs et les raisons pour lesquelles on optera, en définitive, pour telle ou telle issue.* » (p.183)
Ce discours doit essayer « *de décrire comment les humains raisonnent, au lieu de prétendre dire comment ils devraient raisonner comme dans une conception normative de l'épistémologie.* »

Nous avons donc tenté de réfléchir à une proposition d'enseignement autour de la formule d'Euler pour laquelle un discours heuristique et des moments a-didactiques seraient articulés.

Notre projet vise à faire rencontrer aux élèves:

- la nécessité de donner une définition aux objets mathématiques,
- la question de la reformulation de l'énoncé à démontrer,
- la découverte des réfutations venant de contre-exemples soit globaux soit locaux,
- le caractère expérimental d'une preuve mathématique : « *les mécanismes de la découverte mathématique comme ceux qui ont mené à la formule d'Euler ne se conforment généralement pas au scénario de « l'Eurêka » — celui qu'a tendance à idéaliser le « grand public » — mais sont faits d'erreurs, d'ajustements, de retours en arrière, de réorganisation, etc.* » (p3, Tanguay).

L'étude de la formule d'Euler n'est pas explicitement mentionnée dans les programmes ministériels du secondaire. Les textes officiels prévoient que l'élève formule des conjectures, les modifie si les données ou ses connaissances ont changé, mobilise des raisonnements inductifs ou déductifs. (Compétence 3 du socle commun)
« *La géométrie constitue un support privilégié pour la pratique du raisonnement déductif. Mais le raisonnement en géométrie s'appuie aussi sur l'observation et la construction de figures, la mise en place d'expérimentations, de procédures d'essais-erreurs, l'élaboration et la critique de conjectures. Pour le raisonnement mathématique, c'est un domaine riche, varié, présentant un aspect visuel et esthétique, voire ludique, et qui donne lieu à différents types de raisonnement. Pour que l'apprentissage du raisonnement géométrique s'exerce de manière efficace, il ne doit pas se réduire à l'apprentissage formel de la démonstration.* » (p.13)

http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/50/0/doc_acc_clg_raisonnementetdemonstration_223500.pdf
Dès les programmes du Collège, on trouve comme objectifs d'enseignement /d'apprentissage:
- un contre-exemple suffit pour démontrer qu'une conjecture est fausse ; (p16 du document d'accompagnement du Collège http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/50/0/doc_acc_clg_raisonnementetdemonstration_223500.pdf
« *Parallèlement au travail mené dans les classes pour convaincre que la vérification d'un énoncé par quelques exemples ne suffit pas à prouver que celui-ci est vrai, il importe de sensibiliser les élèves au concept de contre-exemple.* »
- le fait que plusieurs exemples permettent de vérifier un énoncé mathématique ne suffit pas à prouver qu'il est vrai ;
- une constatation ou des mesures à partir d'un dessin ne prouvent pas qu'une conjecture soit vraie.

Une proposition

A la page 89, lorsque les élèves discutent des fondements de la méthode des preuves et réfutations, le maître reformule la conjecture :
« Le problème est le suivant : « *Existe-t-il dans un polyèdre une relation entre le nombre de sommets, d'arêtes et de faces analogue à la relation triviale dans un polygone entre le nombre de sommets et d'arêtes : S=A ?* »

Le professeur pourrait commencer par demander aux élèves :
Dans un polygone, une figure plane, il y a toujours autant de sommets que de côtés. Qu'en est-il pour un polyèdre, une figure à trois dimensions ?

Temps 1 : Conjecturer la formule d'Euler

P : nous allons travailler sur des solides ayant des faces planes. Nous les appellerons des polyèdres. Nous connaissons deux types : « type prisme » et « type pyramide ».

Consigne 1 :
Pour tous les polyèdres que vous connaissez, regroupez-les en fonction de leur nombre de faces.

Le professeur doit apporter d'autres polyèdres si les élèves ne le font pas.

Bilan1 : A partir de six faces, on trouve une troisième catégorie de polyèdres.

Consigne 2 : Compter le nombre de sommets.

Bilan 2 : on ne remarque rien. Que peut-on compter ? Les polyèdres ayant le même nombre de faces ne possèdent pas toujours le même nombre de sommets.

Consigne3 : Compter le nombre d'arêtes.

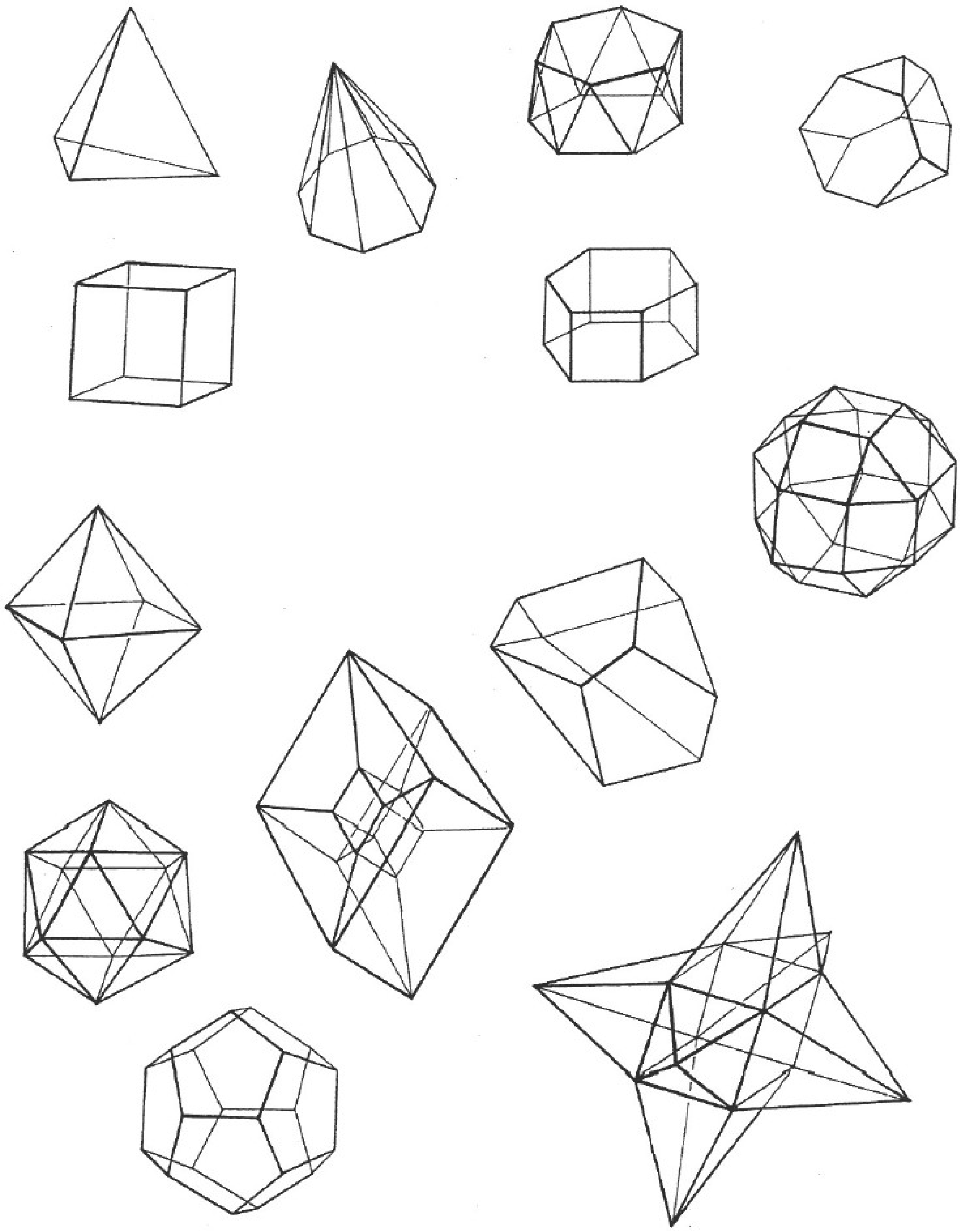
Pour pouvoir classer, il faut compter le nombre d'arêtes pour les polyèdres à F faces et S sommets.
On remarque que dans chaque groupe de polyèdres (F, S), le nombre d'arêtes est identique.

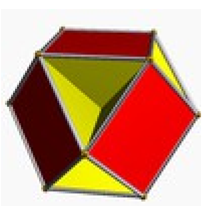
Consigne 4 : Calculer F+S-A.

Bilan 3 : On conjecture que pour un polyèdre, F+S-A=2.

Temps 2 : Préciser les définitions.

Consigne 5 : tester la formule sur d'autres polyèdres.
P aura fabriqué un document à partir de la page suivante.
D'après Tanguay,
http://www.math.uqam.ca/~tanguay_d/Pdf%20des%20articles/Envol_Euler.pdf,





Le professeur: « Pour chaque polyèdre, compter le nombre de sommets S, le nombre d'arêtes A et le nombre de faces F, puis calculer la caractéristique d'Euler, qui est le nombre S – A + F. Ne vous fiez pas qu'au dessin (il arrive que certains sommets ou arêtes soient « cachés »), mais essayez d'imaginer le polyèdre dans l'espace et si possible, de le décomposer en parties plus simples.

Bilan 4 : le Cubohemioctaèdre ne vérifie pas la conjecture.

Ce qui amène au professeur à demander « comment définir un polyèdre ? » et, à ajouter des conditions à la conjecture initiale.

Définition. Un polyèdre est un solide de l'espace délimité par un nombre fini de polygones *convexes (A définir)* appelés les faces du polyèdre. Les côtés des faces sont appelés les arêtes du polyèdre et les extrémités des arêtes sont appelées ses sommets.

Temps 3 : preuve de la formule d'Euler

Etape 1 : faire éprouver la définition d'un diagramme de Schlegel

Le professeur : La preuve est une expérience « de pensée ». Imaginez un polyèdre dont la frontière serait translucide, faite d'une matière parfaitement élastique, qu'on pourrait déformer et étirer comme on veut sans rien déchirer. Imaginez qu'on choisisse une face, qu'on l'étire uniformément dans toutes les directions, jusqu'à ce qu'on puisse « aplatir » les autres faces à l'intérieur de la face étirée. On obtient alors ce qu'on appelle un diagramme de Schlegel du polyèdre.

Le professeur montre les diagrammes de Schlegel du tétraèdre, du cube, de l'icosaèdre, d'une pyramide à base pentagonale rabattue sur sa base et d'une pyramide à base pentagonale rabattue sur une de ses faces latérales.

Le professeur : « Repérez qui est qui. »

Etape 2 : Mise à l'épreuve de l'expérience mentale dans le cas particulier de l'octaèdre

1. Voyons par exemple comment on obtient le diagramme de l'octaèdre en partant d'un

triangle, et en appliquant les deux opérations :
- ajouter une arête (avec le sommet à son extrémité) à un sommet déjà existant ;
- joindre par une arête deux sommets déjà existants.

2. Démontrer que la relation d'Euler revient à: pour tout *réseau plan* (*à définir*) R de F faces, S sommets et A arêtes, F+S-A=1.

On démontrera que l'on ne modifie pas la valeur de F+S-A,
- dans un premier temps, lorsqu'on triangularise tous les polygones du réseau,
- dans un second temps, lorsqu'on supprime un triangle du réseau.
Comme la relation « F+S-A =1 » est clairement vraie dans le cas du triangle (S=3 ; F=1 ; A=3), cette proposition sera démontrée.

Bibliographie

Barbin Evelyne (1991), Les éléments de Géométrie de Clairaut : une géométrie problématisée, dans Repères Irem n°4.

Cellule de Géométrie du Centre de Recherche de la HAUTE ECOLE de la Communauté Française en HAINAUT, Relation d' Euler et les polyèdres sans trou, Mathématiques élémentaires, disponible, le 26/02/2013, à l'adresse :http://www.hecfh.be/cellulegeometrie/documents/pub/pub_12.pdf .

Davis P. et Hersh R.(1983), Mathematical Experience, Pelican Books.
http://www.math.ens.fr/culturemath/maths/pdf/combi/planaire.pdf

Schneider Maggy (2011), INGENIERIES DIDACTIQUES ET SITUATIONS FONDAMENTALES : QUEL NIVEAU PRAXEOLOGIQUE ?, in Actes de la XVème école d'été de didactique des mathématiques, pp175-206

Tanguay Denis (2004-2005) La formule d'Euler, paru dans la Revue *Envol*. Première partie, n°129, octobre-novembre-décembre 2004,pp. 11-18. Deuxième partie, n°130, janvier-février-mars 2005, pp. 11-14.*Prix Euler*, attribué par le GRMS au meilleur article publié dans Envol en 2004-2005.

ANNEXE - Démonstration de la conjecture d'Euler pour les polyèdres convexes

Extrait de http://www.hecfh.be/cellulegeometrie/documents/pub/pub_12.pdf
La démonstration qui suit est inspirée de celle de Cauchy (1789-1857). Elle nécessite les définitions de deux notions, un réseau plan et un diagramme de Schlegel (1843-1905).
Soient P un polyèdre convexe, f, s et a respectivement le nombre de faces, de sommets et d'arêtes de P.
On imagine que les arêtes du polyèdre sont en matière plastique souple et rigide.
On choisit une face du polyèdre que l'on étire de manière continue dans toutes les directions, tout en restant dans le plan déterminé par cette face jusqu'au moment où il est possible de rabattre le reste du squelette de P dans cette face sans que les arêtes, les sommets se chevauchent.

On obtient ainsi ce qu'on appelle un réseau plan.
Définition : Un réseau plan est constitué de faces, d'arêtes et de sommets tels que :
-les faces sont des polygones euclidiens simples (ce sont des polygones constitués de sommets et de côtés tels que : les sommets forment un ensemble fini de points d'un même plan, les côtés sont des segments de droite dont les extrémités sont des sommets, deux côtés consécutifs ne sont jamais alignés, tout sommet est l'extrémité d'exactement deux côtés, les sommets et les côtés forment une figure connexe, et deux côtés non consécutifs ne se rencontrent pas),
-toute arête est soit à l'intersection de deux faces, soit à la frontière du réseau,
-les sommets sont les extrémités des arêtes,
-les faces, les sommets et les arêtes forment un ensemble connexe.
Le réseau plan obtenu est tel que :
- le nombre de sommets est égal à celui de P,
- le nombre d'arêtes est égal à celui de P,
- le nombre de faces est égal à celui de P moins un (la face sur laquelle sont projetées toutes les autres faces de P).

Démontrer la relation d'Euler revient à démontrer que : pour tout réseau plan R de F faces, S sommets et A arêtes, F+S-A=1.
On démontrera que l'on ne modifie pas la valeur de F+S-A,
- dans un premier temps, lorsqu'on triangularise tous les polygones du réseau,
- dans un second temps, lorsqu'on supprime un triangle du réseau.
Comme la relation « F+S-A =1 » est clairement vraie dans le cas du triangle (S=3 ; F=1 ; A=3), cette proposition sera démontrée.
Etape 1 :
On considère un polygone à n côtés du réseau plan R triangularisé.
Deux cas sont à envisager.
- Cas 1 : on a triangularisé à partir d'un sommet.

On obtient un réseau plan avec S sommets, A + (n-2) arêtes, + (n-2) faces.
Donc, la variation de la valeur de « F+S-A » est nulle.
- Cas 2 : on a triangularisé à partir d'un point du polygone.

On obtient un réseau plan avec S +1 sommets, A + n arêtes, (F -1) + n faces.
Donc, la variation de la valeur de « F+S-A » est nulle.

Etape 2 :

La suppression d’un triangle du réseau triangularisé peut, suivant le triangle considéré, se réaliser en retirant soit un, deux ou trois côtés du triangle.
Cas 1 : on supprime un triangle en retirant un côté du triangle.
On obtient un réseau plan avec F-1 faces, S sommets, A-1 arêtes. Donc, la variation de la valeur de « F+S-A » est nulle.
Cas 2 : on supprime un triangle en retirant deux côtés du triangle. On obtient un réseau plan avec F-1 faces, S-1 sommets, A-2 arêtes. Donc, la variation de la valeur de « F+S-A » est nulle.
Cas 3 : on supprime un triangle en retirant les trois côtés du triangle. On obtient un réseau plan avec F-1 faces, S-2 sommets, A-3 arêtes. Donc, la variation de la valeur de « F+S-A » est nulle.