Le problème des musées

Art gallery problem (V. Klee 1973)

Yannick Claudet

15/05/2013

Sommaire

INTRODUCTION

Dans le cadre de l'UE 34 Actualités de la recherche en mathématiques du master 2 de Didactique des mathématiques, j'ai choisi de m'intéresser au problème des musées (Art gallery problem) proposé par Victor Klee en 1973.

Dans un premier temps, j'ai essayé de faire des recherches personnelles en « autonomie », c'est-à-dire sans m'intéresser dans un premier temps à littérature existante et/ou pages web pouvant donner des indices.

Dans un second temps, j'ai proposé le même travail à des Seconde générale dont je suis le professeur de mathématiques.

Dans un troisième temps, je présenterai des éléments théoriques présents dans le livre de Joseph O'Rourke (O'Rourke, 1987)

Pour terminer j'analyserai ma démarche personnelle, celles des élèves et je les rapprocherai des éléments du livre de Joseph O'Rourke.

Une démarche personnelle

Pour commencer ce travail de recherche, je me suis fixé des limites qui sont les suivantes :

- les gardes (en fait j'ai utilisé le mot « caméra ») sont fixes ;
- les gardes peuvent tourner sur eux-mêmes à 360°.

Dans un premier temps, je me suis intéressé au cas des polygones réguliers, me disant qu'un garde suffirait pour surveiller l'ensemble du polygone. J'ai donc commencé par le carré, puis en est rapidement conjecturé que pour un polygone convexe, un garde suffirait (voir figure 1)

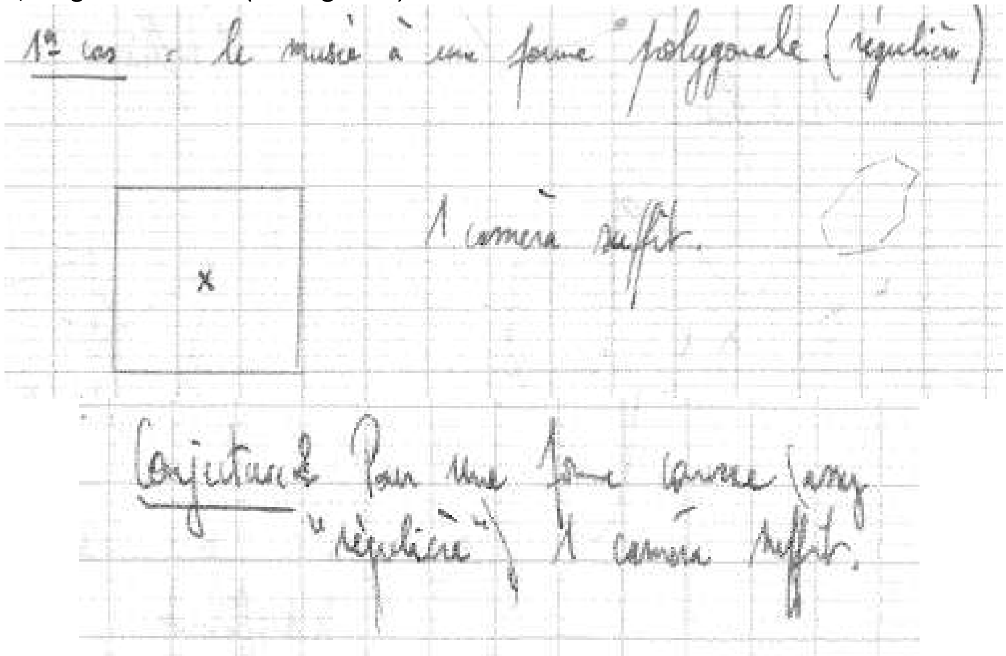


Figure 1

Par la suite, je me suis intéressé au polygone avec des angles droits : je pensais qu'il pouvait y avoir un lien entre le nombre de « creux » (formé par deux angles droits consécutifs) et le nombre de gardes pour surveiller (voir figure 2)

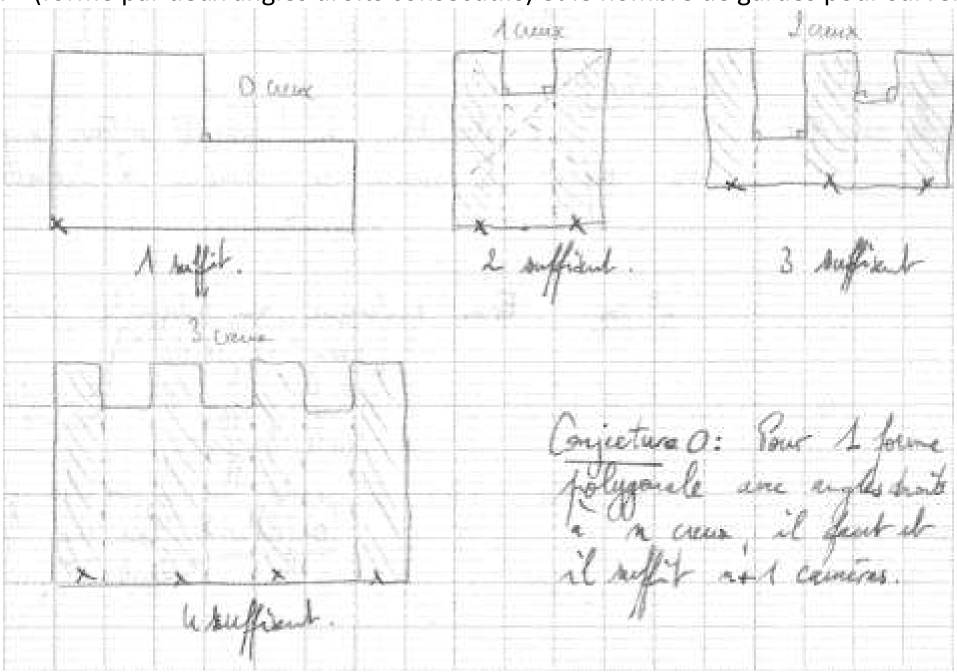


Figure 2

Je n'ai pas trouvé, à ce moment là, de preuve pour démontrer cette conjecture 0. Par la suite, j'ai considéré des polygones mais sans angles droits ; dans les cas qui suivent (figure 3) j'ai commencé à m'intéresser aux secteurs visibles par les gardiens ou plutôt par l'intersection de ces secteurs pour savoir où placer les gardiens.

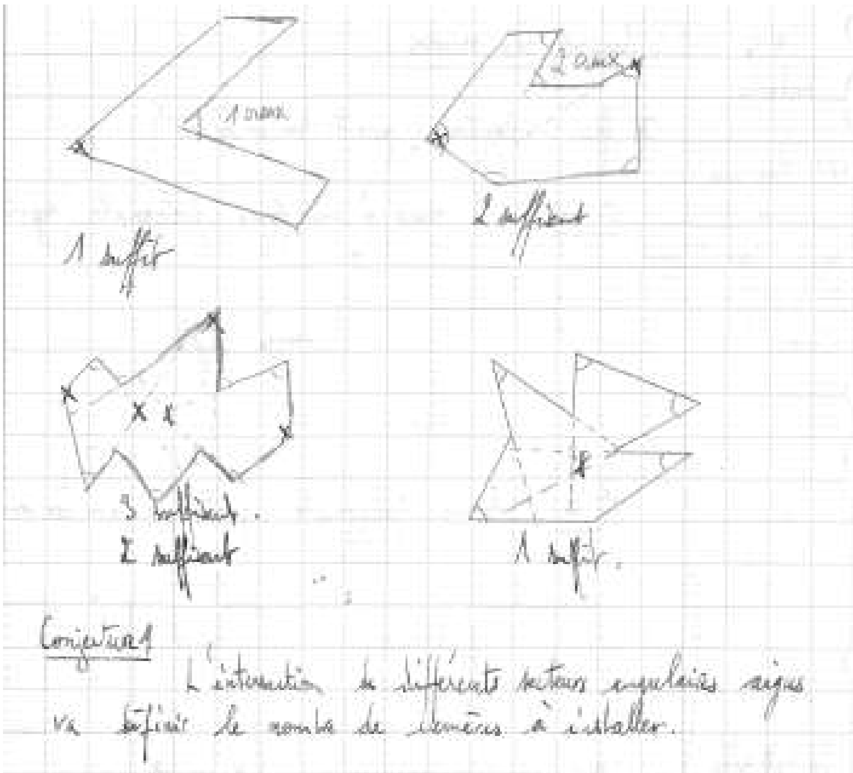


Figure 3

Là encore, pas de démonstration. Pour finir j'ai abandonné les formes polygonales pour aller voir du côté des formes non convexes (figure 4)

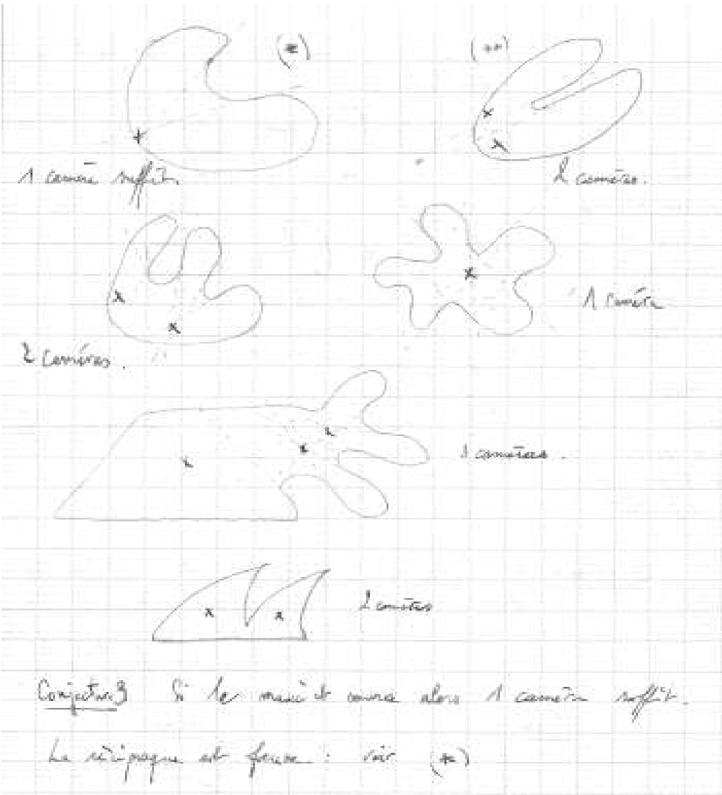


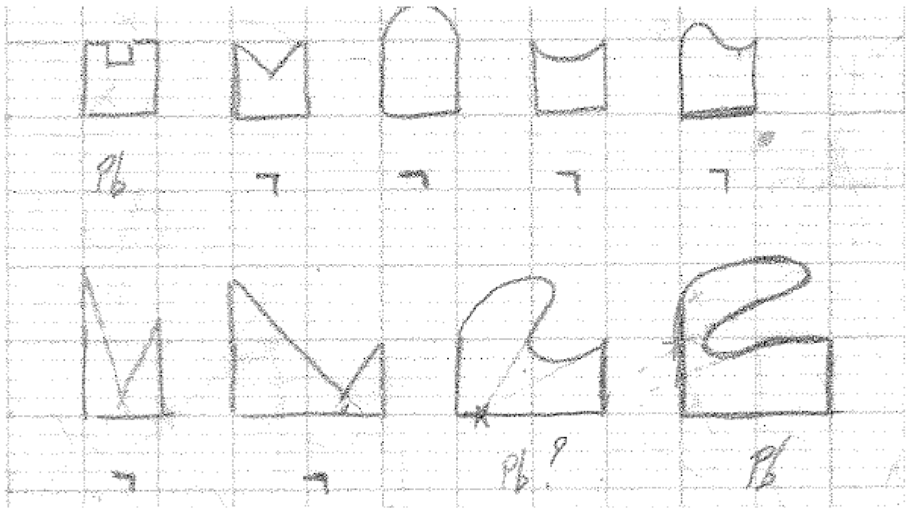
Figure 4

Cette conjecture 3, j'ai essayé de la démontrer :

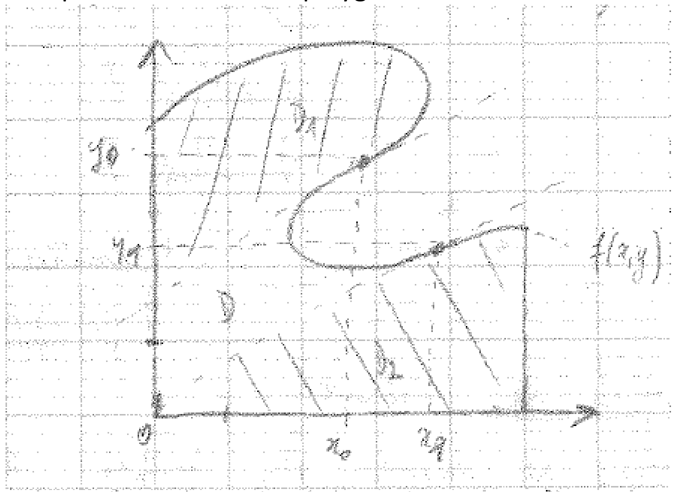
Supposons que le musée M soit convexe. Alors pour tout point x du musée est visible de n'importe quel point du musée ; on en déduit qu'un seul garde est suffisant et nécessaire pour surveiller l'ensemble du musée.

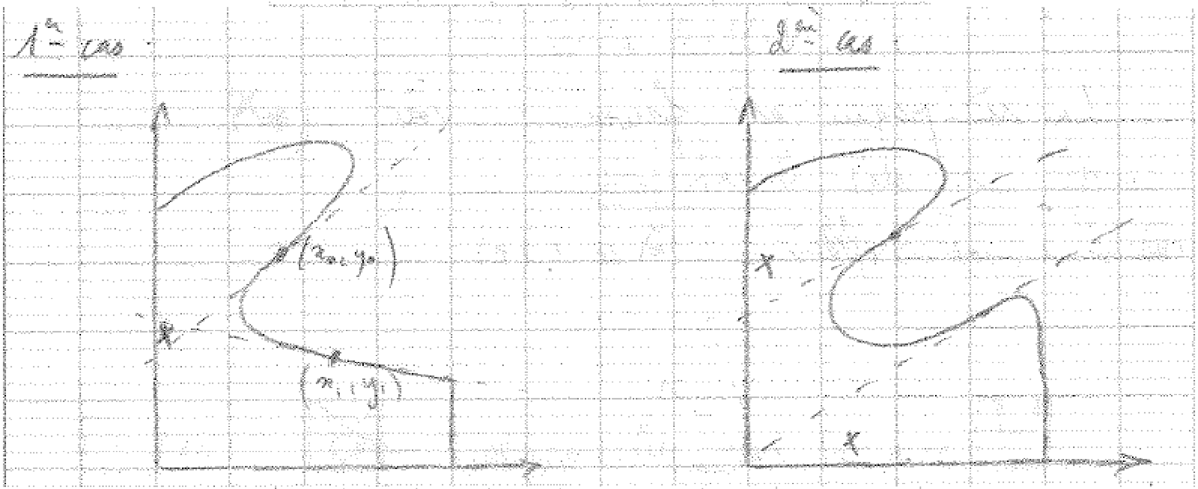
□

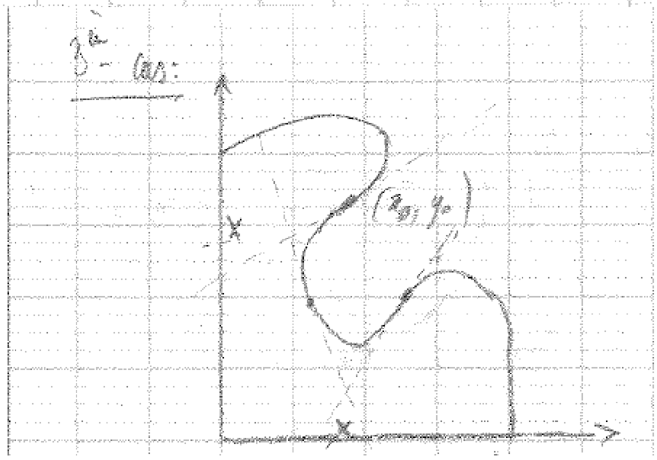
A partir de ce moment là, j'ai voulu « fixer » le polygone en essayant de voir ce qui se passait en en modifiant un côté. J'ai donc décomposé mes polygones en ne modifiant qu'un seul côté.



Je me suis alors intéressé à « découper » l'intérieur des polygones :







Mais ces cas de figure se sont trouvés trop compliqués à étudier et je n'ai pas poursuivi.

Lors de ces recherches, je me suis posé des questions qui pouvaient élargir le problème ou encore le modifier. En voici la liste en sachant que je n'ai pas essayé d'y répondre :

- Pour une surface donnée, existe-t-il une unique solution ?
- Peut-on trouver des solutions telles que les gardes ne recoupent pas deux fois la même surface ?
- Prendre le problème à l'envers : si j'ai n gardes, quels musées puis-je surveiller ?
- Peut-on trouver des « musées de référence » ? Peut-on découper les musées pour simplifier le problème ?
- Si le musée est infini, faut-il un nombre infini de gardes ?

J'ai donc décidé par la suite de présenter ce problème à des élèves de seconde pour étudier leurs démarches et faire un parallèle avec ma propre démarche.

Démarche d'élèves de seconde générale et technologique

La classe de seconde générale dont je suis le professeur de mathématiques a expérimenté cette recherche. Le problème leur a été posé de la façon suivante :

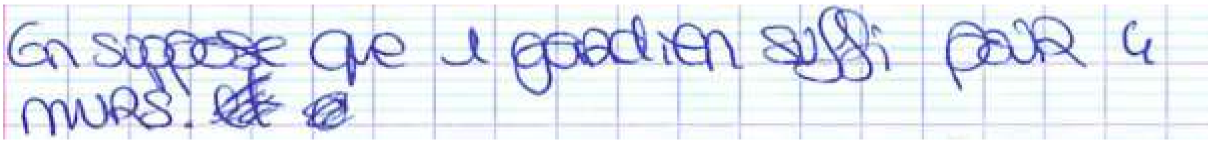
« Vous êtes le directeur d'un musée.
Combien, au minimum, devez-vous embaucher de gardes pour surveiller le musée ? »

Les élèves ont donc commencé à travailler par groupe de 4 avec comme seules consignes supplémentaires :

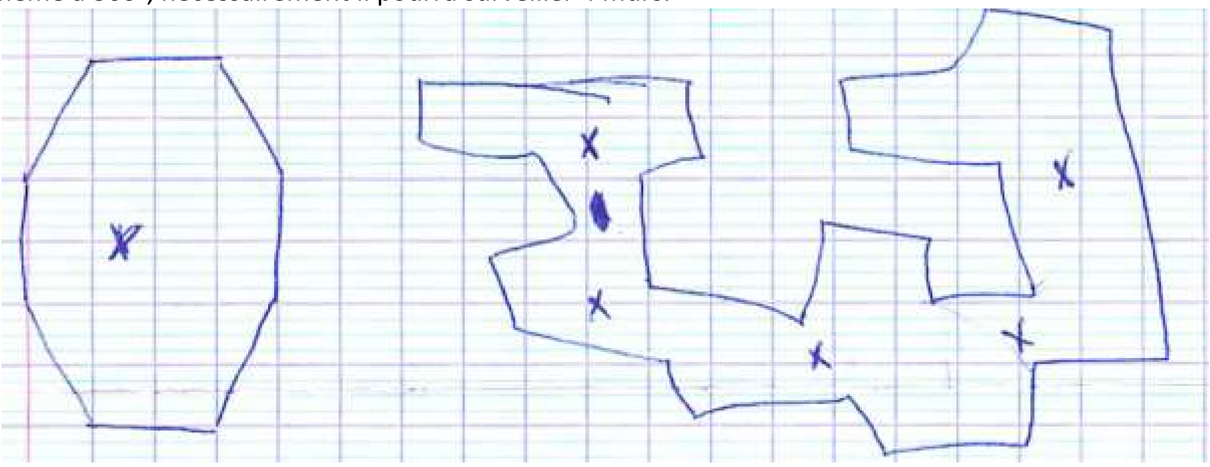
- les gardes sont fixes ;
- les gardes peuvent tourner sur eux-mêmes à 360°.

On trouvera ci-après des extraits de copies d'élèves qui montrent les démarches suivies par les élèves. Pour plus de facilité, je présente les démarches, et éventuellement les résultats dans l'ordre des groupes.

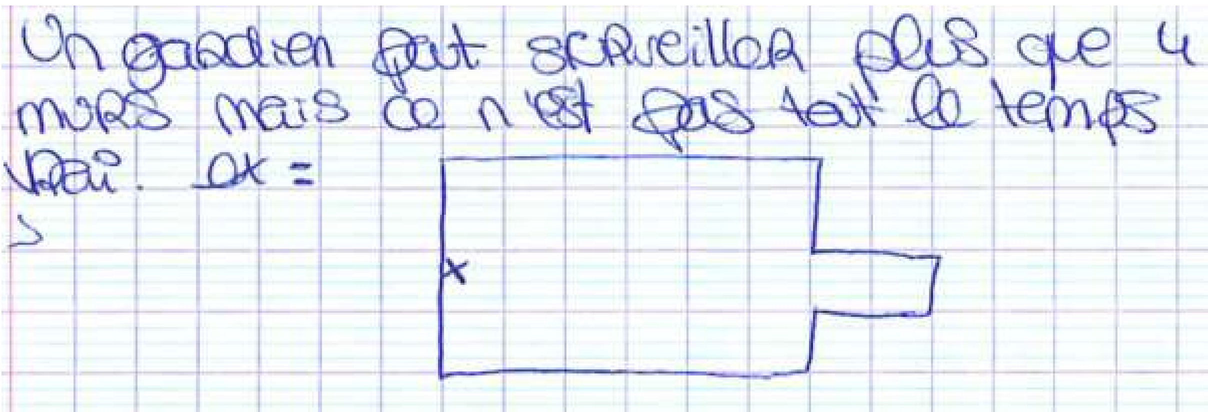
1. Groupe 1 :



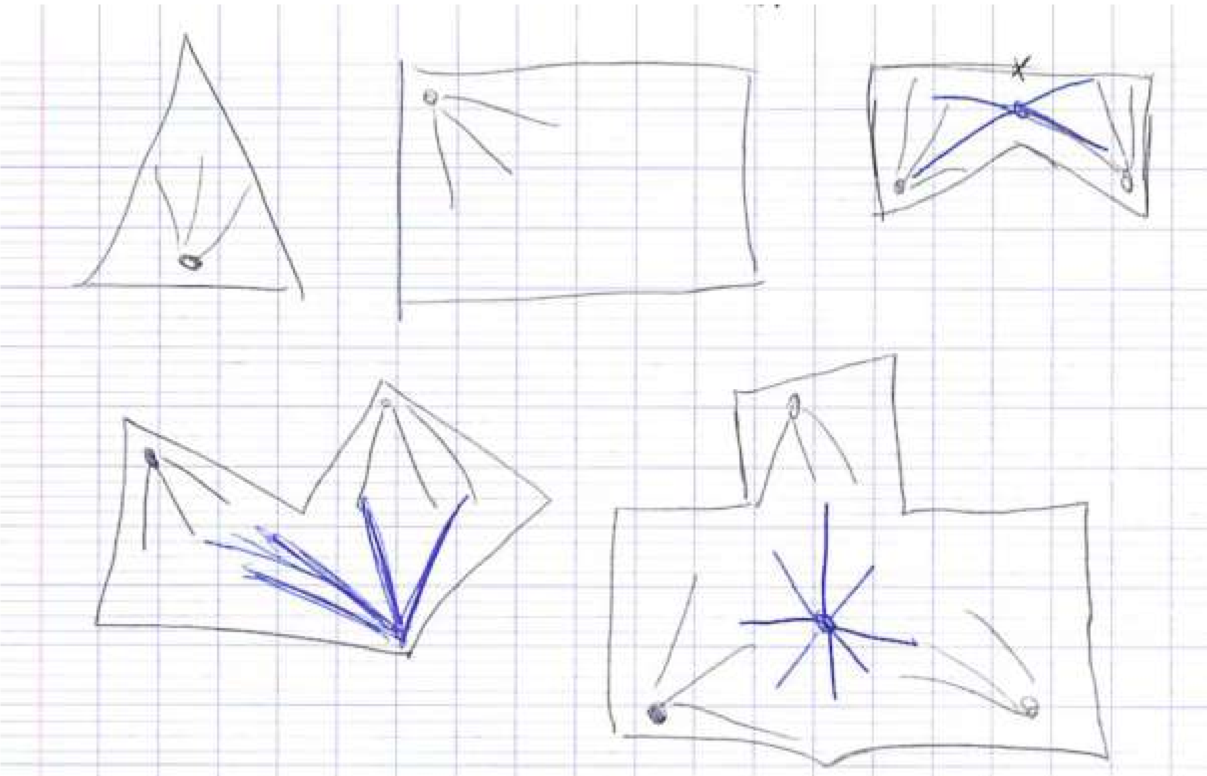
Ce groupe a déjà l'idée que le gardien va se trouver au centre du musée à surveiller et que, comme il peut tourner sur lui-même à 360°, nécessairement il pourra surveiller 4 murs.



Mais très vite, les élèves s'aperçoivent que les gardes peuvent en surveiller davantage :



2. Groupe 4 :



Conjecture : Grâce a nos shéma on suppose que a partir de 5 coté il faut minimum 2 bonhomme

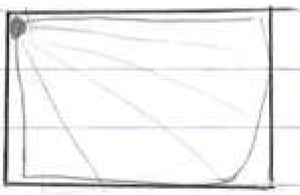
Un peu plus loin :

Notre suppostion et fausse car avec un polygone a 15 coté 1 gardien peut ~~sauffir~~ suffir

3. Groupe 7 :

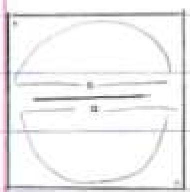
Ce groupe a été particulièrement productif en termes de conjectures (au début les élèves ne voulaient pas utiliser ce vocabulaire car ils ne le comprenaient pas; maintenant il fait partie du vocabulaire « courant »).

Hypothèse 1 :



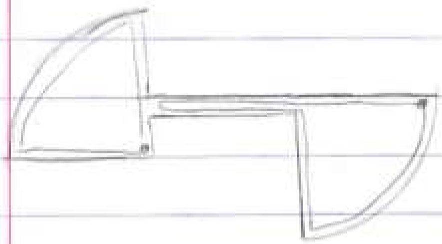
Si il y a un musée de 4 murs, avec seulement des oeuvres sur les murs, une seule personne suffit.

Hypothèse 2 :



Si on a un musée de 4 murs + 1 séparation, on peut prendre au minimum 2 gardiens.

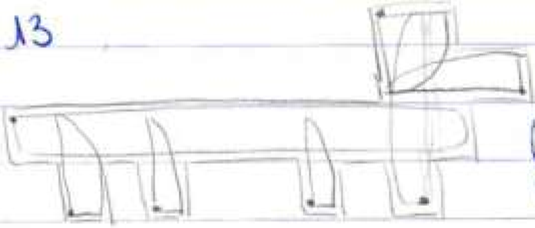
Hypothèse 3 :



Si on a un musée avec un couloir il nous faut minimum 2 gardiens.

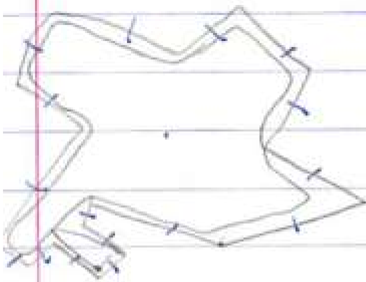
01.13

Hypothèse 4 :



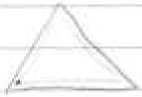
Si on a un musée avec 6 pièces ouvertes, il faudrait 7 gardiens.

Hypothèse 5 :



Si on a une pièce pour 16 murs, il faudrait 2 gardiens.

Hypothèse 6 :



Si on a 3 côtés, il faudrait 1 gardien.

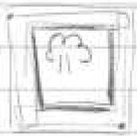
Hypothèse 7 :

Si on à 5 côtés, il faudrait 1 gardien.

Hypothèse 8 :

Si on a 6 côtés, il faudrait 1 gardien

Hypothèse 9 :



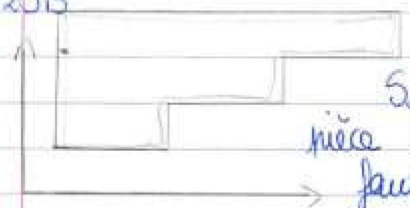
Si on a 4 côtés avec un jardin interieur, il faudrait 2 gardiens.

Hypothèse 10 :

Si on a 12 côtés, il faudrait 2 gardiens

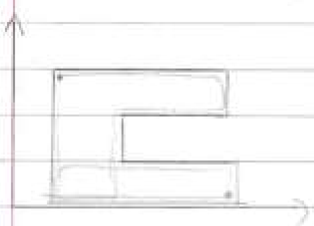
2013

Hypothèse 11 :

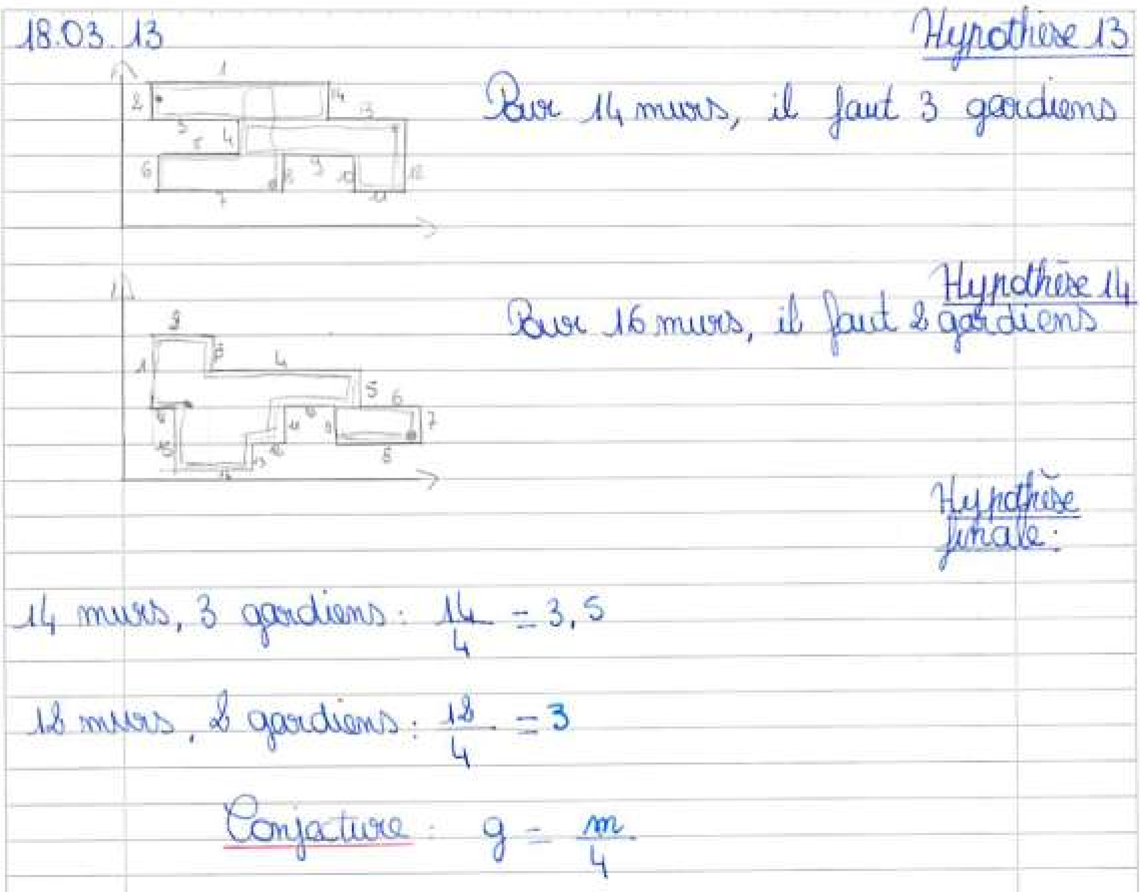


Sur un axe, si on fait une pièce avec des profondeurs différentes, il faut un gardien.

Hypothèse 12 :



Pour 8 murs, il faut minimum 2 gardiens.


18.03.13

Hypothèse 13

Pour 14 murs, il faut 3 gardiens

Hypothèse 14

Pour 16 murs, il faut 8 gardiens

Hypothèse finale :

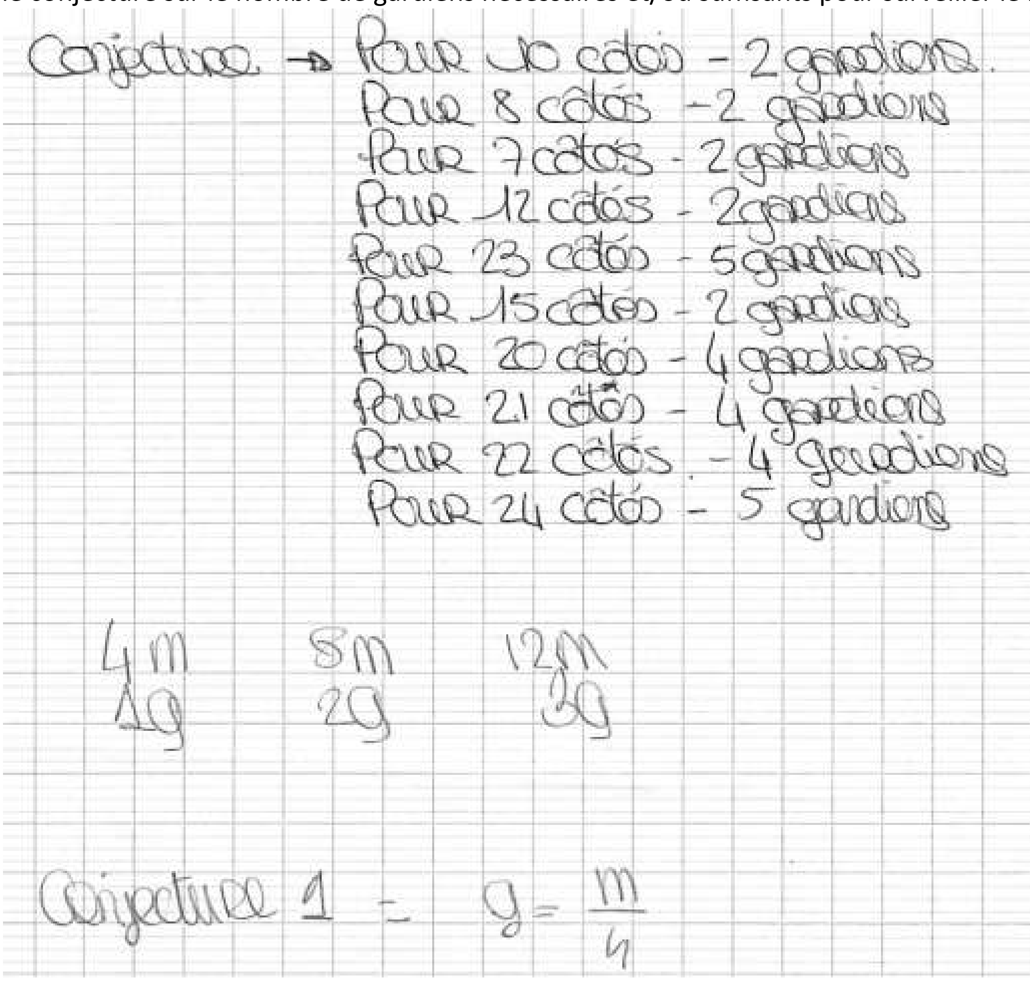
14 murs, 3 gardiens : $\frac{14}{4} = 3,5$

18 murs, 8 gardiens : $\frac{18}{4} = 3$

Conjecture : $g = \frac{m}{4}$

4. Groupe 10 :

Ce groupe, après quelques essais de différentes figures, a formulé plusieurs « conjectures » avant de formuler une conjecture sur le nombre de gardiens nécessaires et/ou suffisants pour surveiller le musée.

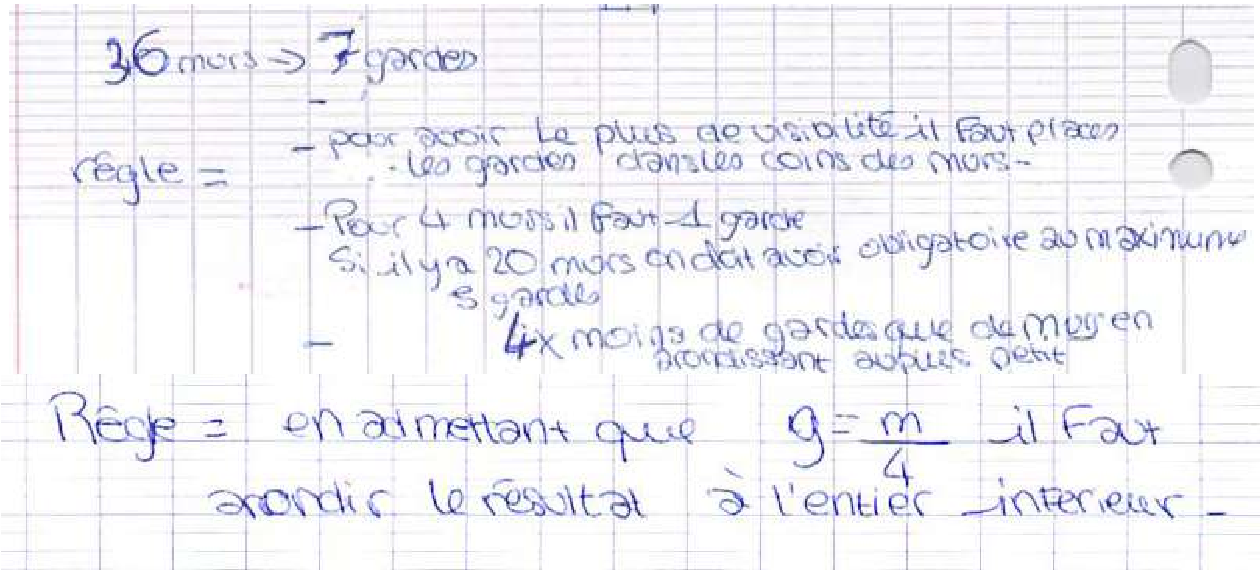

Conjecture → Pour 10 côtés - 2 gardiens.
Pour 8 côtés - 2 gardiens
Pour 7 côtés - 2 gardiens
Pour 12 côtés - 2 gardiens
Pour 23 côtés - 5 gardiens
Pour 15 côtés - 2 gardiens
Pour 20 côtés - 4 gardiens
Pour 21 côtés - 4 gardiens
Pour 22 côtés - 4 gardiens
Pour 24 côtés - 5 gardiens

4m	8m	12m
1g	2g	3g

Conjecture 1 - $g = \frac{m}{4}$

5. Groupe 11 :

Pour finir, ce groupe n’a travaillé qu’une heure sur le problème mais c’est directement intéressé au nombre de gardiens minimum qui sont nécessaires et/ou suffisants pour surveiller le musée.



36 murs → 7 gardes

règle = – pour avoir le plus de visibilité il faut placer les gardes dans les coins des murs.

– Pour 4 murs il faut 1 garde
Si il y a 20 murs on doit avoir obligatoire au maximum 5 gardes

– 4x moins de gardes que de murs en arrondissant au plus petit

Règle = en admettant que $g = \frac{m}{4}$ il faut arondir le résultat à l'entier interieur.

On remarquera le vocabulaire « règle » à la place de « conjecture », l’idée de la preuve n’a pas pu être abordée par ces deux élèves.

6. Groupes restants :

Les groupes 2, 3, 5, 6, 8, 9 et 12 n’ont pas laissé suffisamment de traces de leurs réflexions pour que leurs documents soient exploitables.

Dans l’ensemble le problème a été bien accueilli par les élèves mais a été traité avec plus ou moins de sérieux selon les groupes. Le manque de préparation de ma part y est pour beaucoup ; comme j’envisage de le refaire l’an prochain avec les nouveaux élèves de seconde, l’expérimentation aura plus de résultats a priori. De plus le fait que je ne devais pas présenter les résultats (que je connaissais) aux élèves les a beaucoup frustré ; j’envisage d’essayer de leur présenter une partie des résultats présents dans le livre de Joseph O’Rourke (O'Rourke, 1987).

Ce qu'on peut lire dans O'Rourke (O'Rourke, 1987)

Dans cette section, je présenterai une partie des résultats que j'ai pu trouver dans les deux premiers chapitres du livre qui concernent la partition des polygones et les polygones orthogonaux.

On appellera, dans ce qui suit, un n-gone un polygone à n murs.

Partition des polygones

Le problème des musées est présenté comme relevant d'abord d'un problème de partitionnement des polygones. Plus particulièrement, Chvátal énonce son théorème et le démontre en 1975 (3 ans après la question de Klee) à partir de la triangulation des polygones. Fisk (en 1978) utilisera le même argument pour redémontrer ce théorème à l'aide des graphes et de la 3-coloration.

Chvátal poursuit en utilisant la notion d'éventails : un éventail de triangulation avec un sommet du polygone comme centre de l'éventail, partagé par tous les triangles. Il utilise alors l'hypothèse de récurrence suivante :

Chaque triangulation d'un n-gone peut être partitionnée en $g \leq \lfloor n/3 \rfloor$ éventails.

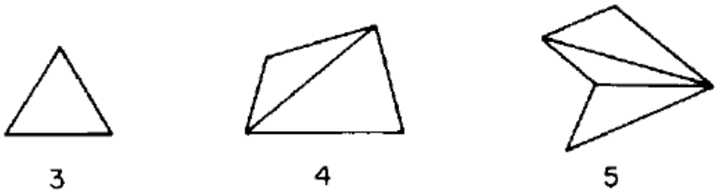
Il énonce alors le théorème suivant :

THEOREME (Chvátal 1975)

$\lfloor n/3 \rfloor$ gardes sont occasionnellement nécessaires et toujours suffisants pour voir l'intérieur entier d'un polygone à n murs.

Preuve

Pour $n \geq 3$: puisque nous partons avec un n-gone, et qu'il n'y a seulement qu'une triangulation simple possible lorsque $n = 3, 4$, et 5, dont chacun est un éventail, voir la figure suivante



Ainsi, l'hypothèse de récurrence est vraie pour $n < 6$. Compte tenu d'une triangulation avec $n > 6$, notre approche consistera à enlever une partie de la triangulation, appliquer l'hypothèse de récurrence, puis remettre la pièce supprimée.

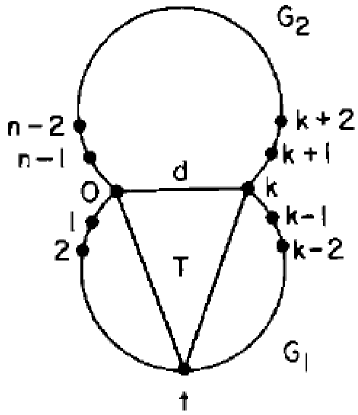
Le coup d'éclat de Chvatal a été de réaliser qu'il y a toujours une diagonale qui coupe 4, 5 ou 6 segments.

<u>LEMME 1.1</u>

Pour chaque triangulation d'un n-gone avec $n \geq 6$, il existe toujours une diagonale d qui coupe exactement 4, 5 ou 6 segments.

Preuve

Choisissons d comme diagonale qui sépare un nombre minimum de sommets du polygone qui ne soit pas moins que 4. Soit $k \geq 4$ ce nombre minimum et notons les sommets du polygone $0, 1, 2, \dots, n-1$ de telle sorte que d soit $(0, k)$.



La diagonale d coupe k sommets en G_1

d doit soutenir un triangle T dont un sommet est un sommet t avec $0 \leq t \leq k$. A partir de $(0, t)$ et (k, t) chacun coupant moins que k segments, par la minimalité de k, nous avons $t \leq 3$ et $k - t \leq 3$. En additionnant ces deux inégalités, on obtient que $k \leq 6$. □

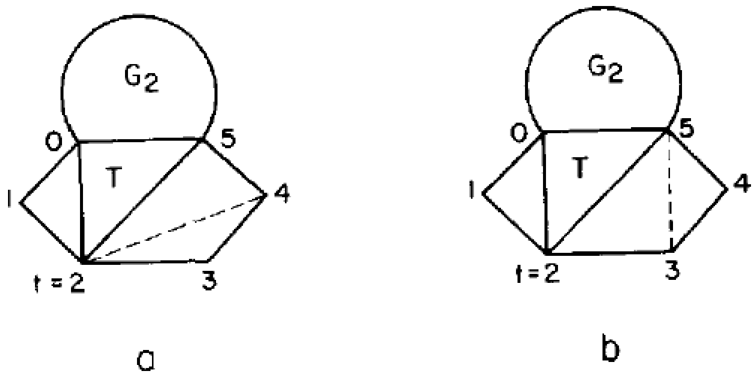
Maintenant le plan est d'appliquer l'hypothèse de récurrence à la portion qui se situe de l'autre côté de la diagonale spéciale d. Soit G_1 la partition triangulée par d ; il y a $k+1$ bords frontières et est donc un (k+1)-gone (voir la figure précédente). Soit G_2 le reste de la triangulation initiale, séparé par d ; il a $n-k+1$ sommets. L'hypothèse de récurrence nous dit qu'il peut être partitionné en $g' = \lfloor (n-k+1)/3 \rfloor$ éventails. Comme $k \geq 4$, $g' \leq \lfloor n/3 \rfloor = \lfloor n/3 \rfloor - 1$.

Ainsi, pour établir le théorème, nous allons montrer que G_1 a seulement besoin d'ajouter un éventail de plus à la partition.

Nous allons considérer tour à tour chaque valeur possible de k.

Cas 1 (k=4). G_1 est un 5-gone. Nous avons déjà observé que tout polygone est un éventail. Ainsi, G a été partitionné en $\lfloor n/3 \rfloor - 1 + 1 = \lfloor n/3 \rfloor$ éventails.

Cas 2 (k=5). G_1 est un 6-gone. Considérons le triangle T de G_1 supporté par d avec son sommet en t. Nous ne pouvons avoir $t = 1$ ou $t = 4$, sinon les diagonales $(0, t)$ ou $(5, t)$ couperaient seulement 4 segments, en contradiction avec la minimalité de $k = 5$. Les cas $t = 2$ et $t = 3$ sont clairement symétriques et on prendra sans perte de généralité que $t = 2$ (voir la figure ci-dessous). Maintenant le quadrilatère (2, 3, 4, 5) peut être triangulé de 2 façons :



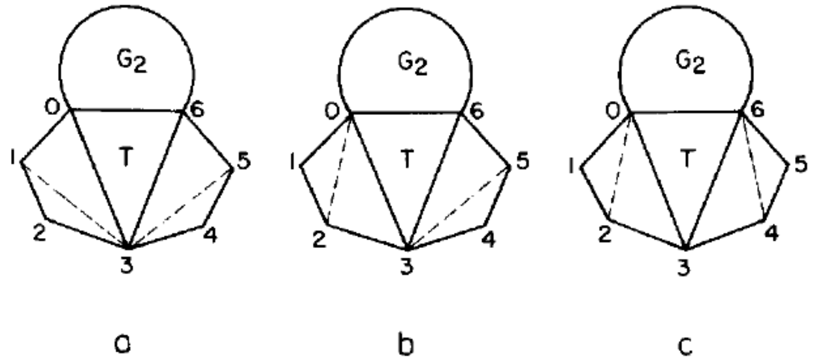
G_1 est un hexagone

Cas 2a : La diagonale (2, 4) est présente (Figure a). Alors G_1 est un éventail et nous avons fini ;

Cas 2b : La diagonale (3, 5) est présente (Figure b). Formons le graphe G_0 comme l'union de G_2 et T. G_0 a $\lfloor n/3 \rfloor - 1$ éventails. Maintenant T doit être une partie d'un éventail F dans la partition de G_0 et le centre de F doit être sur l'un des sommets de T :

Cas 2.b.1 : F est centré en 0 ou 2. Alors fusionner (0, 1, 2) en F et faisons (2, 3, 4, 5) son propre éventail. Maintenant tout G est couvert avec $g' + 1 = \lfloor n/3 \rfloor$ éventails.
Cas 2.b.2 : F est centré en 5. En fusionnant (2, 3, 5) et (3, 4, 5) en F et en faisant de (0 ,1 ,2) un éventail supérieur, on obtient le résultat de $g' + 1$ éventails.

Cas 3 (k=6). G_1 est un 7-gone. La pointe t du triangle T supportée par d ne peut pas être 1, 2, 4 ou 5 sinon la diagonale existerait en coupant $4 \leq k \leq 6$ segments, en contradiction avec la minimalité de k.
Ainsi $t = 3$. Chacun des quadrilatères (0, 1, 2, 3) et (3, 4, 5, 6) a 2 triangulations possibles conduisant à 4 sous cas :



G_1 est un heptagone

Cas 3.a : les diagonales (3, 1) et (3, 5) sont présentes (figure a). Alors G_1 est un éventail et nous avons fini.

Cas 3.b : les diagonales (0, 2) et (3, 5) sont présentes (figure b). Relions le quadrilatère (0, 2, 3, 6) à G_2 pour former un polygone G_0 avec $n-6+1+2=n-3$ sommets, qui par l'hypothèse d'induction peut être partitionné en $g' = \lfloor n/3 \rfloor - 1$ éventails.

Soit F l'éventail de cette partition à laquelle le triangle (0, 2, 3) appartient. Le centre de F doit être un de ces sommets :

Cas 3.b.1 : F est centré en 0 ou 2. Fusionnons (0, 1, 2) à F et faisons de (3, 4, 5, 6) un éventail séparé.

Cas 3.b.2 : F est centré en 3. Fusionnons (3, 4, 5, 6) à F et faisons de (0, 1, 2) un éventail séparé.

Dans tous les cas G est partitionné en $g' + 1 = \lfloor n/3 \rfloor$ éventails.

Cas 3.c : les diagonales (1, 3) et (4, 6) sont présentes. C'est l'image en miroir du cas 3.b.

Cas 3.d : Les diagonales (0, 2) et (4, 6) sont présentes. (figure c). Fusionnons T avec G_2 pour former un polygone G_0 de $n-6+1+1=n-4$ sommets. En appliquant l'hypothèse d'induction, on partitionne G_0 en $g' = \lfloor (n-4)/3 \rfloor \leq \lfloor n/3 \rfloor - 1$ éventails.

Appelons F l'éventail de la partition contenant T :

Cas 3.d.1 : F est centré en 0. Fusionnons le quadrilatère (0, 1, 2, 3) à F et faisons de (3, 4, 5, 6) un éventail séparé.

Cas 3.d.2 : F est centré en 3. Puisque tout G_2 est derrière $d = (0, 6)$, il est clair que nous pouvons tout aussi bien considérer F comme centré en 0, on retrouve le cas 3.d.1.

Cas 3.d.3 : F est centré en 6. C'est l'image miroir du cas 3.d.1.

Dans tous les cas, G est partitionné en $g' + 1 = \lfloor n/3 \rfloor$ éventails.

Ceci complète la preuve. En plaçant les gardes au centre des éventails, on établit le théorème.

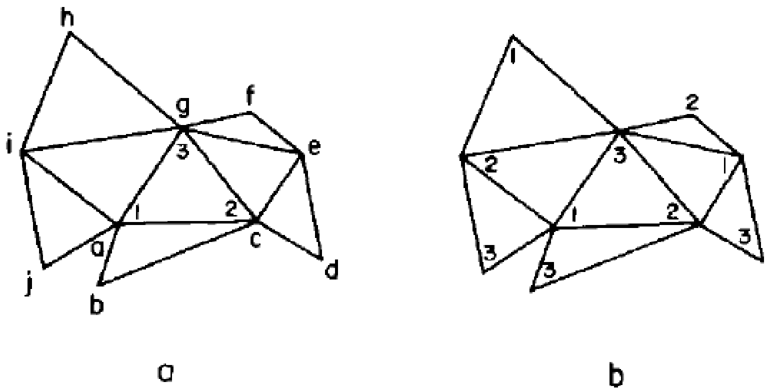
□

La preuve de Fisk, qui arrive trois ans plus tard que celle de Chvátal est intéressante car très courte :

- La première étape dans la preuve de Fisk est de « trianguler » le polygone P en ajoutant des diagonales internes entre les sommets jusqu'à ce qu'on ne puisse plus en ajouter. Pour l'instant on supposera qu'une triangulation existe toujours.
- La seconde étape est de « rappeler » qu'un graphe de triangulation peut être 3-coloré. Une k-coloration d'un graphe est l'attribution de couleurs aux nœuds, une couleur par nœud, n'utilisant pas plus que k couleurs, sans qu'on attribue deux couleurs à deux nœuds voisins. Les nœuds du graphe de triangulation correspondent aux sommets du polygone et les arcs correspondent aux murs du polygone originel plus les diagonales ajoutées pendant la triangulation. Comme le graphe de triangulation est planaire, il est 4-colorable par le célèbre théorème des 4 couleurs (Apple et Haken 1977). Nous attendrons la discussion sur la triangulation pour formaliser la preuve.

  Faisons ici l'affirmation qu'un graphe de triangulation d'un polygone est 3-colorable c'est plausible via un exemple.

  Considérons la triangulation montrée dans la figure suivante (a). Choisissons un triangle arbitrairement, disons acg, et 3-colorons-le comme montré avec les couleurs 1, 2 et 3. Les trois diagonales ac, cg et ga forcent les nœuds b, e et i à être colorés respectivement par 3, 2 et 1. Et ainsi de suite.



3-coloration d’un graphe de triangulation en partant d’acg.

Le résultat est la coloration montrée dans la figure (b), qui est donnée par la coloration initiale arbitraire du premier triangle : « chaque mouvement » est forcé après ça, et le polygone n’ayant pas de trous, la coloration ne causera jamais de conflits.
Assumons maintenant que le graphe de triangulation d’un polygone peut être 3-coloré et terminons la preuve de Fisk.

- La troisième étape est de noter qu’une des 3 couleurs n’est pas utilisée plus d’1/3 du temps.
  Soit a, b, c le nombre d’occurrence des 3 couleurs dans la 3-coloration avec $a \leq b \leq c$. Le nombre total de nœuds est n, donc $a + b + c = n$. Si $a > n/3$, alors la somme des 3 sera plus grand que n. Par conséquent $a \leq \lfloor n/3 \rfloor$ (puisque a doit être un entier).
- Soit le rouge la couleur la moins utilisée. La quatrième et dernière étape consiste à placer des gardes à chaque nœud rouge. Puisqu’un triangle est un graphe complet à trois nœuds, chaque triangle a trois couleurs à ses sommets. Ainsi, chaque triangle a un nœud rouge et donc un garde à un de ses coins. En outre, puisque les triangles forment une partition de P, chaque point du polygone est à l'intérieur d’un triangle, et puisque les triangles sont convexes, chaque point est couvert par un garde rouge. Ainsi les gardes couvrent l'ensemble du polygone, et il y a au plus $\lfloor n/3 \rfloor$ d'entre eux.

Cela prouve que $\lfloor n/3 \rfloor$ gardes sont suffisants pour couvrir l'intérieur d'un polygone quelconque.

$\square$

Il nous reste à montrer qu’une triangulation d’un polygone est possible ; nous le ferons mais indiquerons seulement le théorème, sans le démontrer.

THEOREME

Un polygone de n murs peut être partitionné en $n - 2$ triangles par addition de $n - 3$ diagonales internes.

La preuve est par récurrence en découpant le polygone en deux polygones plus petits, auxquels on applique l’hypothèse de récurrence.

Nous allons maintenant nous intéresser au cas particulier des polygones orthogonaux, c’est-à-dire aux polygones dont les murs consécutifs forment des angles droits.

Polygones orthogonaux

Le problème des polygones orthogonaux a été abordé par Kahn, Klawe et Kleitman en 1980 avec le théorème suivant :

THEOREME

$\lfloor n/4 \rfloor$ gardes sont parfois nécessaires et toujours suffisants pour couvrir l’intérieur d’un polygone orthogonal à n murs.

La démonstration étant fort longue (9 lemmes à démontrer auparavant), nous ne la proposerons pas ici. En prenant les mêmes arguments que pour le cas des polygones dans le cas général, les différentes étapes sont les suivantes :

- Découper le polygone en quadrilatères convexes ;
- Tracer les diagonales internes de chaque quadrilatère ;
- 4-colorer le graphe obtenu par la « quadrilatéralisation » du polygone ;
- Placer les gardes aux sommets dont la couleur est la moins utilisée.

Le problème de la minimalité des gardiens nécessaires et suffisants pour surveiller l'ensemble de l'intérieur d'un polygone à n murs est à ce jour un problème non résolu.

D'autres questions ont été abordées ; je ne mentionnerai que les extensions du problème à d'autres situations :

- Problème en dimension 3 ;
- Extension aux gardes mobiles ;
- Visibilité sur l'extérieur du polygone ;
- Problème de la « cour de prison » ;
- Polygones avec des trous (un des derniers résultats date de 2009)

Hemanshu Kaul et YoungJu Jo (2009)

$\left\lfloor \frac{n+\frac{5}{3}h}{4} \right\rfloor$ gardes sommets sont suffisants pour surveiller un musée à n murs et h trous.

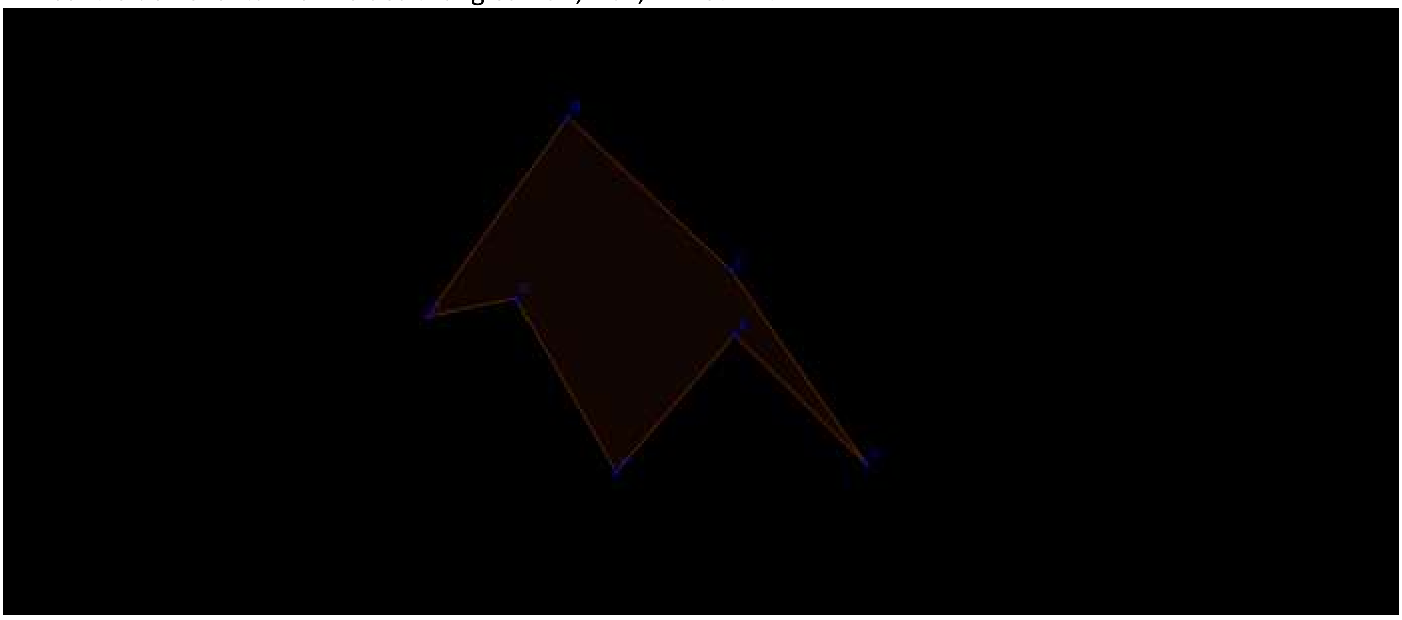
Analyses

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à comparer les démarches des élèves dans leurs recherche avec mes recherches personnelles et les mettre en perspective de ce que j'ai pu lire dans le livre de O'Rourke.

Des démarches similaires

1. Dans la première phase de mes recherches, je me suis attaché à essayer de regarder comment faire « évoluer » les polygones. Dans un premier temps en regardant les polygones réguliers, puis en introduisant des « creux » (des créneaux) pour voir comment placer les gardes pour qu'ils surveillent la plus grande surface possible.
   Les élèves ont, au départ, suivis exactement le même processus : imaginer des musées de plus en plus biscornus et voir comment placer les gardes pour qu'ils surveillent la plus grande surface possible.
   Au final, les élèves ont imaginé des musées avec des formes de plus en plus « délirants » et ne se sont plus intéressés au véritable problème qui leur était posé.
   On retrouve ce type de démarche dans le livre d'O'Rourke : tout d'abord regarder les polygones les plus simples en augmentant petit à petit le nombre de murs.

2. Dans un deuxième temps, j'ai commencé à « découper » mes polygones (avec des secteurs angulaires) pour voir si le placement des gardes pouvait en dépendre.
   Les élèves ont suivi aussi ce principe (à leur manière) en traçant des segments pour montrer la surface visible par les gardes.
   De la même façon, Chvátal dans sa démonstration utilise la notion d'éventail : le centre de l'éventail est un sommet qui est partagé par tous les triangles lors de la triangulation du polygone. Dans la figure qui suit, B est le centre de l'éventail formé des triangles BGA, BGF, BFE et BEC.



3. Par la suite, que ce soit moi ou les élèves, nous avons essayé d'émettre des conjectures et de voir si elles pouvaient nous amener quelque part ou nous permettre d'affiner nos conjectures par des allers-retours entre l'expérimentation et la conjecture. Pour ma part, j'ai pu améliorer mes conjectures en en trouvant des plus générales qui englobaient les précédentes. Peu de démonstration dans mes recherches, par manque de temps mais aussi par manque de connaissances mathématiques (triangulation, partition convexe, etc.).
   De la part des élèves, beaucoup de conjectures aussi, mais aucune démonstration ; certains groupes ont trouvé un (ou plusieurs) contre-exemple quelques fois, mais l'essentiel de leurs recherches ne s'est pas porté sur la démonstration de ce qu'ils avaient trouvé, mais plus a essayé de trouver une réponse au problème.
   Il est difficile de faire un parallèle avec le livre, car il présente les résultats et les preuves (quand elles existent).

Conclusion

En conclusion, ce problème de recherche a été vraiment intéressant du point de vue de mes recherches personnelles, même si je n'ai pas eu le temps d'aller très loin ; mais aussi du point de vue de l'intérêt qu'ont pu y porter les élèves. L'expérience sera très certainement reconduite l'an prochain avec les quelques modifications suivantes : présenter directement le problème des polygones orthogonaux ; les faire travailler en amont sur le problème de coloration des cartes (ce qui pourrait être aussi un bon exercice de recherche pour les élèves) et enfin les faire travailler le découpage des polygones (la partie qui me semble la plus difficilement abordable pour les élèves).

Bibliographie

O'Rourke, J. (1987). *Art Gallery Theorems and Algorithms.* Oxford University Press.